

**Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu**

**Wydział Matematyki i Informatyki**

**Pracownia Ekonometrii Finansowej**

**Zastosowania kopuli w wyznaczaniu  
wartości zagrożonej portfela**

**Applications of copulas in  
calculating Value-at-Risk**

**Paweł Budzianowski**

Numer albumu: 362723

Kierunek: matematyka

Specjalność: matematyka finansowa i aktuarialna

Praca magisterska

napisana pod kierunkiem

prof. dr. hab. Ryszarda Domana

Poznań 2015

## Streszczenie

Modelowanie procesów wielowymiarowych w przypadku odejścia od założenia normalności rozkładu pozwala na analizę zależności nieliniowych. Rodzi to jednak szereg problemów teoretycznych i powoduje zwiększenie się potrzeb obliczeniowych. Kopula, umożliwiając określenie w sposób oddzielny rozkładów brzegowych oraz struktury zależności, która je łączy w rozkład łączny, wydaje się być jedną z odpowiedzi na te problemy. Rozdzielenie analizy łącznej oraz brzegowej znacząco ułatwia konstrukcję modelu i jest heurystycznie intuicyjne. W tej pracy przedstawiam pojęcie kopuli oraz podstawowe modele ekonometryczne, w których kopule wykorzystywane są do prognozowania zachowania się wielowymiarowych szeregów finansowych. Następnie opisuję podstawowe metody estymacyjne oraz własności asymptotyczne estymatorów. Opisane modele pozwalają na szacowanie miar ryzyka, których pewną klasę, zwaną koherentną miarą ryzyka, przedstawiam w rozdziale czwartym. W rozdziale ostatnim, wykorzystując zwroty dwóch indeksów giełdowych DAX oraz WIG20, analizuję zmienną w czasie zależność pomiędzy nimi, stosując model Copula-GAS oraz szacuję wartość zagrożoną i oczekiwany niedobór portfela utworzonego z tych indeksów.

**Słowa kluczowe:** kopula, analiza zależności, wielowymiarowe szeregi czasowe, wartość zagrożona, oczekiwany niedobór

## Abstract

Multivariate time series models without normal assumption regarding distribution allow to analyse non-linear dependence. However, this gives rise to theoretical and computational issues. Copula-based models allow to separately model marginal distributions and dependence structure which links them to form a joint distribution. Separating joint and marginal analysis is heuristically intuitive and helps greatly in constructing econometric models. In this thesis, I present essential theory concerning copulas and most influential econometric models based on a copula, which can model multivariate financial series. I describe basic estimation procedures and asymptotic properties of the estimators. These models allow to calculate risk measures, precisely coherent risk measure, which I describe in chapter four. In the last chapter daily returns on two indices, DAX and WIG20, are used to model time-varying dependence structure between them applying a Copula-GAS model. Then, thanks to estimation I calculate Value-at-Risk and Expected Shortfall of a simulated portfolio made from the index returns.

**Keywords:** copula, dependence analysis, multivariate time series, Value-at-Risk, Expected Shortfall.

# Spis treści

Wstęp . . . . .	5
<b>1 Kopule . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1 Pojęcie kopuli . . . . .	6
1.2 Twierdzenie Sklara . . . . .	8
1.3 Miary zależności . . . . .	16
1.3.1 Miara konkordancji . . . . .	16
1.3.2 Podstawowe miary zależności . . . . .	18
1.4 Podstawowe rodziny kopuli . . . . .	21
1.5 Kopuła warunkowa . . . . .	23
1.6 Pojęcie wielowymiarowego procesu stochastycznego . . . . .	24
<b>2 Modelowanie wielowymiarowego procesu stochastycznego . . . . .</b>	<b>26</b>
2.1 Model wektorowej autoregresji i średniej ruchomej . . . . .	26
2.2 Model stałej macierzy korelacji warunkowych . . . . .	27
2.3 Model zmiennej macierzy korelacji warunkowych . . . . .	27
2.4 Model Copula-GARCH . . . . .	28
2.5 Dynamiczne modele Copula-GARCH oraz Copula-GAS . . . . .	29
<b>3 Estymacja modelu . . . . .</b>	<b>31</b>
3.1 Modele parametryczne z kopułą statyczną . . . . .	31
3.1.1 Metoda największej wiarygodności . . . . .	31
3.1.2 Metoda dwustopniowa . . . . .	33
3.2 Modele semiparametryczne z kopułą statyczną . . . . .	34
3.2.1 Kanoniczna metoda największej wiarygodności . . . . .	35
3.3 Estymacja kopuli dynamicznej . . . . .	36
3.4 Testy dobroci dopasowania . . . . .	37
3.4.1 Przypadek kopuli statycznej . . . . .	37
3.4.2 Przypadek kopuli dynamicznej . . . . .	37
3.4.3 Kryteria informacyjne . . . . .	39
<b>4 Ryzyko portfela oraz jego pomiar . . . . .</b>	<b>40</b>
4.1 Pojęcie ryzyka . . . . .	40
4.2 Miary ryzyka . . . . .	41
4.2.1 Koherentna miara ryzyka . . . . .	42
4.3 Wartość zagrożona . . . . .	43
4.4 Oczekiwany niedobór . . . . .	44
4.5 Porównanie wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru . . . . .	45

<b>5</b>	<b>Badania empiryczne</b>	<b>46</b>
5.1	Przedstawienie danych	46
5.1.1	Analiza wstępna	48
5.1.2	Główne charakterystyki szeregów	48
5.2	Filtracja VARMA-GARCH	48
5.2.1	Histogramy rozkładów	48
5.2.2	Wybór optymalnego modelu	50
5.2.3	Testowanie dopasowania dla reszt	51
5.3	Wyniki dla kopuli statycznych	52
5.4	Wyniki dla kopuli dynamicznej	52
5.4.1	Test jakości dopasowania kopuli dynamicznej	54
5.5	Szacowanie wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru w próbie	54
5.5.1	Szacowanie metodą Monte Carlo	54
5.5.2	Wyniki szacowania	55
	<b>Zakończenie</b>	<b>57</b>
	<b>Literatura</b>	<b>58</b>

## Wstęp

Poprawna analiza i dopasowanie wielowymiarowego rozkładu probabilistycznego jest podstawą, warunkującą jakość wyników estymacji i prognozy wielowymiarowych szeregów czasowych, w tym wielowymiarowych szeregów finansowych. W przeciwieństwie do zjawisk jednowymiarowych, odejście od wielowymiarowego rozkładu eliptycznego (w tym od rozkładu normalnego) powoduje szereg trudności, zarówno na gruncie teoretycznym, jak i estymacyjnym. W większości przypadków związane jest to z brakiem postaci analitycznych, co powoduje problemy obliczeniowe i nie daje pewności w kwestii ekstremów globalnych funkcji wiarygodności. Kopula pozwala na opisanie rozkładu wielowymiarowego za pomocą rozkładów brzegowych oraz oddzielnego schematu opisującego zależności. W znaczący sposób ułatwia to opis obserwowanego zjawiska i w dalszym kroku pozwala na intuicyjne generowanie losowych obserwacji z wyestymowanego modelu, umożliwiając tym samym szacowanie wartości zagrożonej dowolnego portfela.

W rozdziale pierwszym przedstawione zostanie wprowadzenie do teorii kopuli. Omówione zostaną podstawowe własności tej funkcji. Następnie pokazana zostanie możliwość rozszerzenia dowolnej subkopuli do kopuli. Pozwoli to udowodnić podstawowy fakt związany z teorią kopuli, uzasadniający jej wykorzystanie do analizy zjawisk wielowymiarowych – twierdzenia Sklara, mówiące o istnieniu oraz jedności kopuli dla dowolnego rozkładu wielowymiarowego z ciągłymi jednowymiarowymi dystrybuantami brzegowymi.

W rozdziale drugim opisane są najważniejsze modele wielowymiarowe wykorzystywane do opisu finansowych szeregów czasowych. Ukazane są zarówno modele wykorzystujące kopule, jak i modele „klasyczne”.

W kolejnym rozdziale zajmuję się problemem estymacji modelu. Wyróżniamy tutaj podejście statyczne oraz dynamiczne – w pierwszym przypadku zakładamy, że zależności pomiędzy zmiennymi są stałe w czasie, w przypadku drugim uchylamy to założenie. W obu przypadkach możemy rozważać estymację w pełni parametryczną lub tzw. estymację dwustopniową, w której dystrybuanty brzegowe opisane są za pomocą klasycznego estymatora.

W ostatnich dwóch rozdziałach przedstawię pojęcie ryzyka oraz sposoby jego pomiaru. Skupię się na wartości zagrożonej oraz oczekiwanym niedoborze, który jest tzw. miarą koherentną – najczęściej obecnie wykorzystywanym rodzajem miary ryzyka. Następnie, opierając się na notowaniach indeksów WIG20 oraz DAX w latach 2003-2015 oraz modelu kopuli, będę szacować powyższe dwie miary dla stworzonego portfela, wykorzystując metodę Monte Carlo. Estymacja bazować będzie na modelu Copula-GAS przedstawionym po raz pierwszy w roku 2011 przez Creala, Koopmana oraz Lucasa.

Z powodu obszerności zagadnienia, dowody lematów oraz twierdzeń zostaną podane tylko w rozdziale pierwszym, w celu udowodnienia twierdzenia Sklara. W dalszych rozdziałach podaję literaturę, w której znajdują się wyprowadzenia wszelkich tez.

# 1. Kopule

Pojęcie kopuli zdefiniował Abe Sklar w roku 1959 [Sklar 1959]. Będziemy rozważać przypadek dwuwymiarowy, jednakże uogólnienie na wyższy wymiar przebiega naturalnie [Nelsen 2006].

## 1.1. Pojęcie kopuli

By sformułować teorię kopuli w najogólniejszym przypadku, trzeba wyjść od pojęcia subkopuli. Podstawową własnością związaną z subkopulą jest wymóg, by była 2-rosnąca (ang. *2-increasing*), co jest dwuwymiarowym odpowiednikiem funkcji niemalejącej jednej zmiennej.

**Definicja 1.1.** *Dwuwymiarowa subkopula*

Dwuwymiarowa subkopula jest funkcją  $\mathcal{C}$  zdefiniowaną na  $A \times B$ , gdzie  $A$  i  $B$  są niepustymi podzbiórmi odcinka  $I = [0, 1]$  zawierającymi punkty 0 oraz 1, spełniającą następujące warunki:

1. dla każdej pary  $(v, z) \in A \times B$  funkcja jest uziemniona, tj.

$$\mathcal{C}(v, 0) = \mathcal{C}(0, z) = 0, \quad (1.1)$$

2. dla każdej pary  $(v, z) \in A \times B$  zachodzi

$$\mathcal{C}(v, 1) = v, \quad \mathcal{C}(1, z) = z, \quad (1.2)$$

3. jest funkcją 2-rosnącą, tj.

$$\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_2, z_1) - \mathcal{C}(v_1, z_2) + \mathcal{C}(v_1, z_1) \geq 0, \quad (1.3)$$

dla  $v_1 \leq v_2$  i  $z_1 \leq z_2$ .

Na bazie powyższej definicji otrzymujemy szereg podstawowych własności subkopuli.

**Lemat 1.2.** *Funkcja  $\mathcal{C}(v, z) : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ , która spełnia warunki 1 – 3 z definicji 1.1, jest niemalejąca zarówno względem pierwszej, jak i drugiej zmiennej.*

*Dowód.* Własność pokażemy dla pierwszej zmiennej. Korzystając z własności 3 definicji subkopuli, po przegrupowaniu mamy

$$\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_2) \geq \mathcal{C}(v_2, z_1) - \mathcal{C}(v_1, z_1)$$

dla każdego  $z_2 \geq z_1$  i  $v_2 \geq v_1$ . Zatem różnica  $\mathcal{C}(v_2, z) - \mathcal{C}(v_1, z)$  jest niemalejącą funkcją zmiennej  $z$ . W szczególności, dla każdego  $z \in B$

$$\mathcal{C}(v_2, z) - \mathcal{C}(v_1, z) \geq \mathcal{C}(v_2, 0) - \mathcal{C}(v_1, 0) = 0.$$

Otrzymujemy stąd, że dla każdego  $z \in B$  oraz  $v_1, v_2 \in B$  takich, że  $v_2 \geq v_1$ ,

$$\mathcal{C}(v_2, z) - \mathcal{C}(v_1, z) \geq 0.$$

Analogicznie, lemat dowodzi się dla drugiej zmiennej. ■

**Lemat 1.3.** *Dla każdej pary  $(v, z) \in A \times B$  zachodzi*

$$0 \leq \mathcal{C}(v, z) \leq 1.$$

*Dowód.* Niech  $(v, z) \in A \times B$ . Mamy

$$0 = \mathcal{C}(0, 0) = \mathcal{C}(v, 0) = \mathcal{C}(0, z) \leq \mathcal{C}(v, z) \leq \mathcal{C}(1, 1) = 1.$$

■

**Twierdzenie 1.4.** *Funkcja  $\mathcal{C}$  jest jednostajnie ciągła na  $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ .*

*Dowód.* Weźmy dwa dowolne punkty  $(v_1, z_1)$  oraz  $(v_2, z_2)$  należące do  $A \times B$ . Zachodzi

$$|\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_1)| \leq |\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_2)| + |\mathcal{C}(v_1, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_1)|.$$

Jeżeli  $v_1 \leq v_2$ , to na podstawie z lematu 1.2,  $\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_2) \geq 0$ . Z tego, że subkopia jest funkcją dwurosną, dla prostokąta  $[v_1, v_2] \times [z_2, 1]$  mamy

$$\mathcal{C}(v_2, 1) - \mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, 1) + \mathcal{C}(v_1, z_2) \geq 0.$$

Po przegrupowaniu zachodzi

$$\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_2) \leq \mathcal{C}(v_2, 1) - \mathcal{C}(v_1, 1) = v_2 - v_1.$$

Podobnie, jeżeli  $v_2 < v_1$  to:

$$\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_2) \leq 0,$$

$$\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_2) \geq \mathcal{C}(v_1, 1) - \mathcal{C}(v_2, 1) = v_1 - v_2.$$

Oba te przypadki prowadzą do nierówności

$$|\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_2)| \leq |v_2 - v_1|.$$

Podobnie w przypadku drugiej zmiennej mamy

$$|\mathcal{C}(v_1, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_1)| \leq |z_2 - z_1|,$$

co razem daje

$$|\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_1)| \leq |v_2 - v_1| + |z_2 - z_1|.$$

■

Wartości dowolnej kopuli są ograniczone poprzez następujące nierówności

**Twierdzenie 1.5.** *Każda subkopula spełnia poniższe nierówności*

$$\max(v + z - 1, 0) \leq \mathcal{C}(v, z) \leq \min(v, z)$$

dla każdego punktu  $(v, z) \in A \times B$ .

*Dowód.* Korzystając z własności subkopuli, biorąc  $v_2 = z_2 = 1$  mamy

$$1 - \mathcal{C}(v_1, 1) - \mathcal{C}(1, z_1) + \mathcal{C}(v_1, z_1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$v_1 + z_1 - 1 \leq \mathcal{C}(v_1, z_1),$$

dla każdego punktu  $(v_1, z_1) \in A \times B$ . Ponieważ  $\mathcal{C}(v, z) \geq 0$ , zatem

$$\max(v + z - 1, 0) \leq \mathcal{C}(v, z)$$

dla każdego punktu  $(v, z) \in A \times B$ .

Ponownie korzystając z własności kopuli oraz lematu 1.2, mamy

$$\mathcal{C}(v, z) \leq \mathcal{C}(v, 1) = v,$$

$$\mathcal{C}(v, z) \leq \mathcal{C}(1, z) = z$$

stąd otrzymujemy prawą stronę nierówności. ■

W przypadku gdy  $A$  oraz  $B$  są odcinkami postaci  $[0, 1]$ , możemy mówić o kopuli

**Definicja 1.6.** Dwuwymiarową subkopulę, która jest określona na  $[0, 1] \times [0, 1]$  (tj.  $A = B = I$ ), nazywamy dwuwymiarową kopulą  $\mathcal{C}$ .

## 1.2. Twierdzenie Sklára

Zdefiniujmy teraz pojęcie funkcji brzegowej związanej z kopulą:



**Definicja 1.7.** *Funkcja brzegowa*

Funkcjami brzegowymi danej kopuli  $\mathcal{C} : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  są  $\mathcal{C}_1 : A \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $\mathcal{C}_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ , zdefiniowane odpowiednio jako:

$$\mathcal{C}_1(x) = \mathcal{C}(x, 1),$$

$$\mathcal{C}_2(y) = \mathcal{C}(1, y).$$

By przejść do udowodnienia podstawowego twierdzenia dotyczącego kopuli, potrzebne będą następujące lematy:

**Lemat 1.8.** *Funkcja  $\mathcal{C} : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  uziemniona i 2-rosnąca, z brzegami  $\mathcal{C}_1$  oraz  $\mathcal{C}_2$ , spełnia następujące nierówności:*

$$|\mathcal{C}(v_2, z) - \mathcal{C}(v_1, z)| \leq |\mathcal{C}_1(v_2) - \mathcal{C}_1(v_1)|,$$

dla każdej pary punktów  $(v_1, z)$ ,  $(v_2, z)$  należących do dziedziny  $\mathcal{C}$  oraz

$$|\mathcal{C}(v, z_2) - \mathcal{C}(v, z_1)| \leq |\mathcal{C}_2(z_2) - \mathcal{C}_2(z_1)|,$$

dla każdej pary punktów  $(v, z_1)$ ,  $(v, z_2)$  należących do dziedziny  $\mathcal{C}$ .

*Dowód.* Niech  $v_2 > v_1$ . Rozważmy prostokąt  $[v_1, v_2] \times [z, 1]$  w  $\mathbb{R}^2$ . Korzystając z własności (1.3), otrzymujemy

$$\mathcal{C}(v_2, 1) - \mathcal{C}(v_1, 1) - \mathcal{C}(v_2, z) + \mathcal{C}(v_1, z) \geq 0.$$

Stąd

$$\mathcal{C}(v_2, z) - \mathcal{C}(v_1, z) \leq \mathcal{C}_1(v_2) - \mathcal{C}_1(v_1)$$

Na podstawie lematu 1.2 prawdziwa jest zatem nierówność

$$|\mathcal{C}(v_2, z) - \mathcal{C}(v_1, z)| \leq |\mathcal{C}_1(v_2) - \mathcal{C}_1(v_1)|.$$

Jeżeli  $v_2 < v_1$ , ponownie korzystając z własności (1.3), otrzymujemy tym razem

$$\mathcal{C}(v_1, z) - \mathcal{C}(v_2, z) \leq \mathcal{C}_1(v_2) - \mathcal{C}_1(v_1).$$

Ostatecznie, z lematu 1.2 otrzymujemy

$$|\mathcal{C}(v_1, z) - \mathcal{C}(v_2, z)| \leq |\mathcal{C}_1(v_2) - \mathcal{C}_1(v_1)|.$$

Dla drugiej zmiennej rozumowanie przebiega analogicznie. ■

**Lemat 1.9.** *Dla funkcji zdefiniowanej jak w poprzednim lemacie zachodzi następująca*

nierówność

$$|\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_1)| \leq |\mathcal{C}_1(v_2) - \mathcal{C}_1(v_1)| + |\mathcal{C}_2(z_2) - \mathcal{C}_2(z_1)|,$$

dla każdej pary punktów  $(v_1, z_1), (v_2, z_2)$  należących do dziedziny  $\mathcal{C}$ .

*Dowód.* Wykorzystując dwukrotnie powyższy lemat, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_1, z_1)| &\leq |\mathcal{C}(v_2, z_2) - \mathcal{C}(v_2, z_1)| + |\mathcal{C}(v_2, z_1) - \mathcal{C}(v_1, z_1)| \\ &\leq |\mathcal{C}_1(v_2) - \mathcal{C}_1(v_1)| + |\mathcal{C}_2(z_2) - \mathcal{C}_2(z_1)|. \end{aligned}$$

■

Poniższy lemat mówi o możliwości rozszerzenia dowolnej subkopuli do kopuli, która jest identyczna z daną subkopulą na jej dziedzinie. Jest także niezbędny do udowodnienia twierdzenia Sklara.

**Lemat 1.10** (Schweizer i Sklar 1974). *Dla każdej subkopuli  $\mathcal{C}$  istnieje kopula  $\mathcal{K}$ , taka że zachodzi:*

$$\mathcal{K}(v, z) = \mathcal{C}(v, z),$$

dla każdego  $(v, z) \in \text{Dom } \mathcal{C}$ . Kopula ta nie musi być wyznaczona jednoznacznie.

*Dowód.* Niech dziedziną subkopuli  $\mathcal{C}$  będzie  $A \times B$ . Z ciągłości  $\mathcal{C}$ , możemy ją rozszerzyć do  $\bar{\mathcal{C}}$  z dziedziną  $\bar{A} \times \bar{B}$ , gdzie  $\bar{A}$  oraz  $\bar{B}$  są domknięciami zbiorów  $A$  i  $B$ . Rozszerzmy teraz subkopulę  $\bar{\mathcal{C}}$  do kopuli  $\mathcal{K}$  następująco: dla każdego punktu  $(v, z) \in I^2$  niech  $v_2$  oraz  $v_1$  będą odpowiednio elementem minimalnym oraz maksymalnym w  $\bar{A}$  spełniającym nierówności  $v_1 \leq v \leq v_2$  oraz analogicznie  $z_1, z_2$  z  $\bar{B}$ , odpowiednio największym oraz najmniejszym elementem spełniającym nierówności  $z_1 \leq z \leq z_2$ .

Niech teraz:

$$\lambda_1 = \begin{cases} (v - v_1)/(v_2 - v_1), & \text{gdy } v_1 < v_2, \\ 1, & \text{gdy } v_1 = v_2, \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} (z - z_1)/(z_2 - z_1), & \text{gdy } z_1 < z_2, \\ 1, & \text{gdy } z_1 = z_2, \end{cases}$$

oraz zdefiniujemy funkcję  $\mathcal{K}$  następująco:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(v, z) &= (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)\bar{\mathcal{C}}(v_1, z_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1\bar{\mathcal{C}}(v_1, z_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)\bar{\mathcal{C}}(v_2, z_1) + \lambda_1\mu_1\bar{\mathcal{C}}(v_2, z_2). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Widać, że  $\text{Dom } \mathcal{K} = I^2$  oraz  $\mathcal{K}$  spełnia własności 1 i 2 z definicji 1.1. Musimy wykazać własność 3. Niech  $(s, t) \in I^2$  będzie takim punktem, że  $v \leq s$  i  $z \leq t$  oraz oznaczymy przez  $s_1, s_2$  największy oraz najmniejszy element z  $A$  taki, że  $s_1 \leq s \leq s_2$ . Odpowiednio

definiujemy elementy  $z_1, z_2$  z  $B$ , spełniające nierówność  $z_1 \leq z \leq z_2$  oraz  $\lambda_2$  i  $\mu_2$ .

Niech  $R(v, z; s, t)$  oznacza wartość wyrażenia

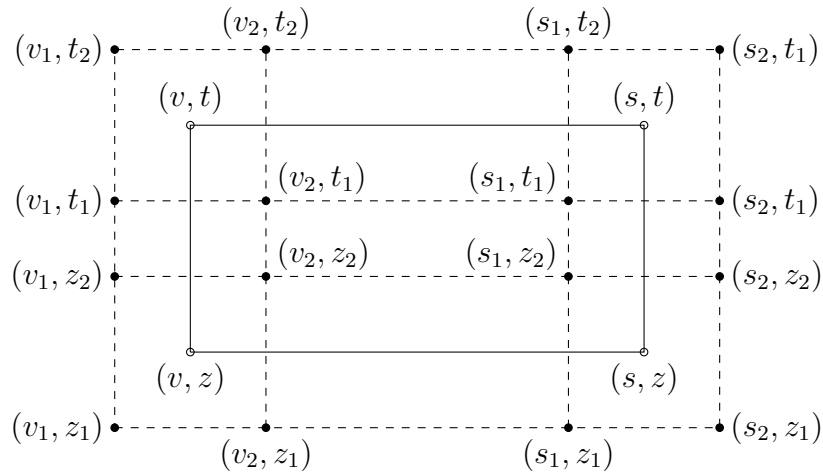
$$\mathcal{K}(s, t) - \mathcal{K}(v, t) - \mathcal{K}(s, z) + \mathcal{K}(v, z).$$

Rozważmy dwa skrajne przypadki rozstawienia punktów. W najprostszym, nie ma punktów pomiędzy  $v$  a  $s$  w  $\bar{A}$ , oraz pomiędzy  $z$  a  $t$  w  $\bar{B}$ . Wtedy  $v_1 = s_1, v_2 = s_2, z_1 = t_1$  oraz  $z_2 = t_2$ . Daje to w ostateczności

$$R(v, z; s, t) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)R(v_1, z_1; v_2, z_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)R(s_1, t_1; s_2, t_2),$$

z czego otrzymujemy, że  $R(v, z; s, t) \geq 0$ , ponieważ  $v \leq s$  i  $z \leq t$ , implikuje  $\lambda_2 \geq \lambda_1$  oraz  $\mu_2 \geq \mu_1$ .

Rozważmy drugi – najbardziej skomplikowany przypadek, który ilustruje rysunek 1.1:



**Rysunek 1.1.** Ilustracja graficzna przypadku najbardziej złożonego.

W tym przypadku zachodzą nierówności

$$v < v_2 \leq s_1 < s,$$

$$z < z_2 \leq t_1 < t.$$

Stosując 1.4 do czterech wyrażeń z  $R(v, z; s, t)$ , po uproszczeniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} R(v, z; s, t) = & (1 - \lambda_1)\mu_2R(v_1, t_1; v_2, t_2) + \mu_2R(v_2, t_1; s_1, t_2) + \\ & + \lambda_2\mu_2R(s_1, t_1; s_2, t_2) + (1 - \lambda_1)R(v_1, z_2; v_1, t_1) + \\ & + R(v_2, z_2; s_1, t_1) + \lambda_2R(s_1, z_2; s_2; t_1) + \\ & + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1) + R(v_1, z_1; v_2, z_2) + \\ & + (1 - \mu_1)R(v_2, z_1; s_1, z_2) + \lambda_2(1 - \mu_1)R(s_1, z_1; s_2, z_2). \end{aligned}$$

Wyrażenie po prawej stronie powyższej równości jest kombinacją nieujemnych wyrażeń o nieujemnych współczynnikach. Zatem  $R(v, z; s, t) \geq 0$ . W pozostałych przypadkach wyrażenie to jest również nieujemne. Zatem funkcja  $\mathcal{K}$  spełnia własność 3 z definicji 1.1, czyli jest kopulą. ■

Rozważmy teraz abstrakcyjną przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , gdzie  $\Omega$  jest zbiorem zdarzeń elementarnych,  $\mathcal{F}$  jest  $\sigma$ -algebrą określoną na tym zbiorze, a  $P$  jest miarą probabilistyczną określoną na  $\mathcal{F}$ . Niech  $X$  oraz  $Y$  będą zmiennymi losowymi na przestrzeni  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

**Definicja 1.11.** *Dystrybuanta*

Dystrybuanta jednowymiarowej zmiennej losowej  $X$  to funkcja  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  postaci

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Przez  $F_1, F_2, F$  oznaczać będziemy odpowiednio dystrybuantę zmiennych  $X, Y$  oraz ich dystrybuantę łączną. Na potrzeby dalszej analizy własności kopuli potrzebne będzie zdefiniowanie funkcji quasi-odwrotnej do dystrybuanty.

**Definicja 1.12.** *Uogólniona odwrotność dystrybuanty*

Przez uogólnioną odwrotność dystrybuanty rozumiemy funkcję określoną wzorem

$$F^{-1}(u) = \inf \{x : F(x) \geq u, 0 \leq u \leq 1\}.$$

Za pomocą uogólnionej odwrotności dystrybuanty można udowodnić następującą właściwość przetransformowanych zmiennych losowych o ciągłej dystrybuancie:

**Twierdzenie 1.13.** *Jeżeli zmienna losowa  $X$  ma ciągłą dystrybuantę  $F$ , to  $F(X) \sim U(0, 1)$ , gdzie  $U(0, 1)$  oznacza rozkład jednostajny na przedziale  $[0, 1]$ .*

*Dowód.* Weźmy dowolne  $u \in [0, 1]$ . Musimy pokazać równość  $P(F(X) \leq u) = u$ . Mamy

$$\begin{aligned} P(F(X) \leq u) &= P(F^{-1} \circ F(X) \leq F^{-1}(u)) \\ &= P(X \leq F^{-1}(u)) \\ &= F(F^{-1}(u)) \\ &= u. \end{aligned}$$

Pierwsza równość zachodzi, ponieważ  $F^{-1}$  jest funkcją niemalejącą. Druga równość, dla dystrybuanty ściśle rosnącej wynika z równości  $F^{-1} \circ F(x) = x$ . W przypadku dystrybuanty niemalejącej, może istnieć przedział  $[x_1, x_2]$ , gdzie dla  $x \in [x_1, x_2]$  mamy  $P(X \leq x) = P(X \leq x_1)$ . Na takich przedziałach zachodzi  $P(x_1 < X \leq x) = F(x) - F(x_1) = 0$ . Ostatnia równość wynika z zakładanej ciągłości dystrybuanty  $F$ . ■

Z definicji wynika wprost, że kopula jest łączną dystrybuantą dwóch zmiennych losowych o jednostajnym rozkładzie prawdopodobieństwa na przedziale  $[0, 1]$ , tj.

$$\mathcal{C}(v, z) = P(U \leq u, V \leq v),$$

gdzie  $U \sim U(0, 1)$  oraz  $V \sim U(0, 1)$ . Zatem wartość kopuli w punkcie  $(F_1(x), F_2(y))$  jest wartością łącznej dystrybuanty zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$ , gdyż

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(F_1(x), F_2(y)) &= P(U \leq F_1(x), V \leq F_2(y)) \\ &= P(F_1^{-1}(U) \leq x, F_2^{-1}(V) \leq y) \\ &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= F(x, y) \end{aligned}$$

Możemy teraz przejść do udowodnienia twierdzenia Sklára.

**Twierdzenie 1.14** (Sklar, 1959). *Niech  $F_1, F_2$  będą dystrybuantami brzegowymi. Wtedy:*

1. *jeżeli  $\mathcal{C}$  jest subkopulą, której dziedziną zawiera  $\text{Ran}(F_1) \times \text{Ran}(F_2)$ , to funkcja przyjmująca dla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  wartość*

$$\mathcal{C}(F_1(x), F_2(y))$$

*jest łączną dystrybuantą z dystrybuantami brzegowymi  $F_1, F_2$ ;*

2. *odwrotnie, jeżeli  $F$  jest łączną dystrybuantą z dystrybuantami brzegowymi  $F_1, F_2$ , to istnieje dokładnie jedna subkopula  $\mathcal{C}$  z dziedziną  $\text{Ran}(F_1) \times \text{Ran}(F_2)$  taka, że*

$$F(x, y) = \mathcal{C}(F_1(x), F_2(y)).$$

Jeżeli  $F_1, F_2$  są ciągłe, to subkopuła  $\mathcal{C}$  jest kopułą. W przeciwnym wypadku istnieje taka kopuła  $\mathcal{K}$ , że dla każdego  $(v, z) \in \text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2$  mamy

$$\mathcal{K}(v, z) = \mathcal{C}(v, z).$$

*Dowód.* 1. Musimy sprawdzić, że funkcja  $F$  określona wzorem  $F(x, y) = \mathcal{C}((F_1(x), F_2(y)))$  posiada własności dystrybuanty dwuwymiarowej oraz jej dystrybuantami brzegowymi są  $F_1$  i  $F_2$ .

Oczywiście dziedziną funkcji  $F$  jest podzbiór  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Z własności kopuli, jest ona 2-rosnąca. Mamy

$$F(x, -\infty) = \mathcal{C}((F_1(x), F_2(-\infty))) = \mathcal{C}((F_1(x), 0)) = 0,$$

$$F(-\infty, y) = \mathcal{C}((F_1(-\infty), F_2(y))) = \mathcal{C}((0, F_2(y))) = 0,$$

oraz

$$F(+\infty, +\infty) = \mathcal{C}((F_1(+\infty), F_2(+\infty))) = \mathcal{C}(1, 1) = 1.$$

Zachodzi także:

$$F(x, +\infty) = \mathcal{C}((F_1(x), F_2(+\infty))) = \mathcal{C}((F_1(x), 1)) = F_1(x)$$

i analogicznie dla drugiej zmiennej.

2. Rozważmy łączną dystrybuantę  $F$  zmiennych losowych  $X, Y$ , z dystrybuantami brzegowymi  $F_1, F_2$  oraz dwa punkty  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Założmy, że

$$F_1(x_1) = F_1(x_2) \quad \text{oraz} \quad F_2(y_1) = F_2(y_2).$$

Na mocy lematu 1.9 zachodzi:

$$|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| \leq |F_1(x_1) - F_1(x_2)| + |F_2(y_1) - F_2(y_2)|,$$

zatem  $F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2)$ . Wynika stąd, że dla każdego punktu  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , wartość dystrybuanty łącznej  $F$  jest funkcją dystrybuant brzegowych  $F_1$  oraz  $F_2$ . Zatem zbiór:

$$\{((F_1(x), F_2(y)), F(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

definiuje funkcję rzeczywistą  $\mathcal{C}$ , której dziedziną jest produkt kartezjański  $\text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2$ . Funkcja ta jest subkopułą, co wynika z własności dystrybuanty dwuwymiarowej.

Jeżeli  $F_1$  oraz  $F_2$  są ciągłe, to  $\text{Dom } \mathcal{C} = I^2$ , zatem  $\mathcal{C}$  jest kopulą. W drugim przypadku korzystamy z lematu 1.10. ■

Twierdzenia Sklara pokazuje, iż z jednej strony dowolny rozkład wielowymiarowy możemy podzielić na dwie części – przechowywującą informację o jednowymiarowych rozkładach brzegowych oraz kopuli, w której przechowywana jest *cała* informacja odnośnie zależności pomiędzy danymi zmiennymi losowymi. W przypadku modelowania określonego zjawiska wielowymiarowego, pozwala nam to na podzielenie procesu dopasowywania odpowiedniego modelu statystycznego na część związaną z określeniem dystrybuant brzegowych oraz odpowiedniej kopuli, poprawnie oddającej związek pomiędzy analizowanymi zmiennymi losowymi. Co więcej, twierdzenie Sklara zapewnia jednoznaczność prawidłowej kopuli, gdy dystrybuanty jednowymiarowe są ciągłe. Z drugiej strony powyższe twierdzenie pokazuje, iż połączenie dowolnych dwóch rozkładów jednowymiarowych oraz funkcji, która spełnia własności subkopuli z definicji 1.1, powoduje otrzymanie określonego rozkładu wielowymiarowego. Pozwala to na stworzenie „nieskończenie” wielkiej liczby rozkładów wielowymiarowych, jeżeli zapewnimy, że funkcja łącząca brzegi spełnia określone właściwości.

Poniższe twierdzenie mówiące o niezmienniczości kopuli względem transformacji monotonicznie rosnącej jest bardzo ważną charakterystyką, która sprawia, że kopula jest „atrakcyjnym” narzędziem podczas modelowania statystycznego. Stosując transformację monotonicznie rosnącą, mamy pewność, że kopula nowych zmiennych losowa jest identyczna, a co za tym idzie związek pomiędzy danymi zmiennymi losowymi w obu przypadkach jest identyczny.

**Twierdzenie 1.15.** *Niech  $X$  i  $Y$  będą zmiennymi losowymi o ciągłych dystrybuantach, oznaczonych odpowiednio  $F_1$  i  $F_2$ , mającymi kopulę  $\mathcal{C}$ . Jeżeli  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  są funkcjami ściśle rosnącymi, to zmienne losowe  $\alpha_1(X)$  i  $\alpha_2(Y)$ , o dystrybuantach  $F_1(\alpha_1^{-1})$  i  $F_2(\alpha_2^{-1})$  oraz łącznej dystrybuancie określonej wzorem  $G(s, t) = P(\alpha_1(X) \leq s, \alpha_2(Y) \leq t)$ , posiadają tę samą kopulę co zmienne  $X$  oraz  $Y$ , tj.*

$$G(s, t) = \mathcal{C}(F_1(\alpha_1^{-1}(s)), F_2(\alpha_2^{-1}(t)))$$

*Kopula jest zatem niezmiennicza ze względu na transformacje ściśle rosnące.*

*Dowód.* Niech  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  będzie dowolnym punktem oraz niech  $x$  oraz  $y$  będą takie, że  $s = F_1(x)$ ,  $t = F_2(y)$ . Przez  $\bar{\mathcal{C}}$  oznaczmy kopulę zmiennych  $\alpha_1(X)$  oraz  $\alpha_2(Y)$ , a przez  $H_1, H_2$  ich dystrybuanty brzegowe. Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(s, t) &= \mathcal{C}(F_1(x), F_2(y)) = F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P(\alpha_1(X) \leq \alpha_1(x), \alpha_2(Y) \leq \alpha_2(y)) = G(\alpha_1(x), \alpha_2(y)) \\ &= \bar{\mathcal{C}}(H_1(\alpha_1(x)), H_2(\alpha_2(y))) = \bar{\mathcal{C}}(F_1(x), F_2(y)) = \bar{\mathcal{C}}(s, t) \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem, że zachodzi równość  $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$ . ■

Dla kopuli, jako szczególnego przypadku klasy rodzin rozkładów dwuwymiarowych, możemy sformułować pojęcie gęstości.

**Definicja 1.16.** Jeżeli kopula  $\mathcal{C}$  jest absolutnie ciągła, to jej gęstość wyraża się wzorem

$$c(v, z) = \frac{\partial^2 \mathcal{C}(v, z)}{\partial v \partial z}.$$

Lemat 1.17, bezpośrednio wynikający z twierdzenia Sklára, mówiący o tzw. reprezentacji kanonicznej gęstości kopuli, jest bardzo przydatny w trakcie estymacji modeli.

**Lemat 1.17.** Niech  $X$  i  $Y$  będą zmiennymi losowymi o ciągłych dystrybuantach, odpowiednio  $F_1$  i  $F_2$ , dystrybuancie łącznej  $F$  oraz kopuli  $\mathcal{C}$ . Wówczas jeśli wszystkie dystrybuanty i kopula są absolutnie ciągłe, to zachodzi następująca równość

$$f(x, y) = c(F_1(x), F_2(y))f_1(x)f_2(y), \quad (1.5)$$

gdzie  $f$  jest gęstością łączną,  $c$  jest gęstością kopuli, a  $f_1, f_2$  są gęstościami zmiennych  $X, Y$  odpowiednio.

*Dowód.* Niech  $(v, z)$ , gdzie  $v = F_1(x)$ ,  $z = F_2(y)$ , będzie dowolnym punktem z wnętrza  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Wówczas, korzystając z reguły łańcuchowej, mamy:

$$\begin{aligned} c(v, z) &= \frac{\partial^2 \mathcal{C}(v, z)}{\partial v \partial z} = \frac{\partial^2 F(F_1^{-1}(v), F_2^{-1}(z))}{\partial v \partial z} \\ &= f(F_1^{-1}(v), F_2^{-1}(z)) / \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} \frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = \frac{f(x, y)}{f_1(x)f_2(y)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

■

Z postaci kanonicznej jasno wynika, że gęstość kopuli jest równa 1 w przypadku, gdy zmienne losowe  $X, Y$  są niezależne.

## 1.3. Miary zależności

### 1.3.1. Miara konkordancji

Problem analizy zależności jest z definicji związany bezpośrednio z pojęciem kopuli. Parafrazując R. Nelsena: kopula, która łączy dwa przetransformowane rozkłady i tworzy z nich łączną dystrybuantę dwuwymiarową, określa zależność pomiędzy dwoma zmiennymi losowymi, z czego otrzymujemy, że pojęcie zależności jest jedną z cech kopuli.

Jednakże próba zdefiniowania ogólnej koncepcji miary zależności rodzi szereg problemów. O dwóch zmiennych losowych, można mówić, iż w jakiś sposób są ze sobą powiązane,



jeżeli nie zachodzi równość

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y),$$

gdzie  $F$  jest dystrybuantą łączną, a  $F_1$  i  $F_2$  są dystrybuantami brzegowymi. Jednakże stwierdzenie braku niezależności, nie daje jednoznacznej informacji o typie związku pomiędzy danymi zmiennymi losowymi.

Jednym z najpopularniejszych pojęć w sposób możliwie najogólniejszy opisujący związek pomiędzy zmiennymi, jest tzw. miara konkordancji. W nieformalny sposób można ją zdefiniować następująco:

**Definicja heurystyczna** (Cherubini i in. 2004)

Pojęcie konkordancji jest próbą określenia występowania „zgodności” zachowań zmiennych losowych, tj. prawdopodobieństwo występowania „dużych” („małych”) wartości zmiennych  $X$  oraz  $Y$  jednocześnie jest wysokie, podczas gdy występowanie „dużych” („małych”) wartości zmiennej  $X$  jednocześnie z „małymi” („dużymi”) wartościami zmiennej  $Y$  jest niskie.

W sposób formalny, dowolną funkcję można nazwać miarą konkordancji, jeżeli spełnia poniższe aksjomaty [Scarsini 1984]:

**Definicja 1.18.**  $\kappa_{X,Y}$  jest miarą konkordancji pomiędzy ciągłymi zmiennymi losowymi  $X$  i  $Y$  z kopulą  $\mathcal{C}$  jeżeli:

1. jest określona dla każdej pary ciągłych zmiennych losowych,
2. jest unormowana:  $\kappa_{X,Y} \in [-1, 1]$ ,
3. jest symetryczna:  $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$ ,
4. jeżeli  $X$  i  $Y$  są niezależne, to  $\kappa_{X,Y} = 0$ ,
5.  $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$ ,
6. jeżeli  $\{X_n, Y_n\}$  jest ciągiem ciągłych zmiennych losowych z kopulą  $\mathcal{C}_n$  oraz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_n(v, z) = \mathcal{C}(v, z), \text{ dla każdej pary } (v, z) \in I^2,$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{X_n, Y_n} = \kappa_{X, Y},$$

7. jeżeli  $\mathcal{C}_1$  i  $\mathcal{C}_2$  są kopulami wektorów  $(X_1, Y_1)$  i  $(X_2, Y_2)$  oraz  $\mathcal{C}_1(v, z) \leq \mathcal{C}_2(v, z)$  dla każdej pary  $(v, z) \in I^2$ , to:  $\kappa_{\mathcal{C}_1} \leq \kappa_{\mathcal{C}_2}$ .

Powyższa definicja implikuje następującą własność:

**Twierdzenie 1.19.** *Jeżeli  $\alpha_1$  oraz  $\alpha_2$  są funkcjami ściśle rosnącymi na obrazie dystrybuant  $G$  oraz  $H$  zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$  odpowiednio, wówczas:*

$$\kappa_{X,Y} = \kappa_{\alpha_1(X),\alpha_2(Y)}.$$

Miara konkordancji jest zatem niezmiennicza względem transformacji ściśle rosnących. Kolejną istotną własnością jest fakt, iż niezależność zmiennych losowych jest warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym na to, by wartość miary konkordancji była równa 0.

### 1.3.2. Podstawowe miary zależności

Mówimy, że dwie różne realizacje wektora losowego  $(X_1, Y_1)$  oraz  $(X_2, Y_2)$  są zgodne, jeżeli  $X_1 > X_2$  i  $Y_1 > Y_2$  lub  $X_1 < X_2$  i  $Y_1 < Y_2$ , a niezgodne w przypadku przeciwnym [Doman 2011]. Jedną z bardziej znanych miar zależności, które spełniają aksjomaty konkordancji jest współczynnik tau Kendalla [Kendall 1938]

**Definicja 1.20.** *Współczynnik Kendalla*

Współczynnik  $\tau$  Kendalla dwóch zmiennych  $X_1$  i  $Y_1$  jest zdefiniowany wzorem

$$\tau = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0),$$

gdzie  $(X_2, Y_2)$  jest wektorem losowym niezależnym od  $(X_1, Y_1)$  i mającym taki sam rozkład, jak  $(X_1, Y_1)$ .

Powyższa definicja pokazuje, że współczynnik Kendalla mierzy różnicę pomiędzy prawdopodobieństwem zgodności (konkordancji) a prawdopodobieństwem niezgodności (dyskonkordancji) dwóch niezależnych wektorów losowych, mających ten sam łączny rozkład.

W przypadku rozkładów losowych o ciągłych dystrybuantach, możemy wykorzystać kopulę do obliczenia wartości tej miary zależności

**Twierdzenie 1.21.** *Niech  $X$  oraz  $Y$  będą zmiennymi losowymi o ciągłych dystrybuantach, z kopulą  $\mathcal{C}$ . Współczynnik  $\tau$  Kendalla jest wówczas równy*

$$\tau = 4 \iint_{I^2} \mathcal{C}(v, z) d\mathcal{C}(v, z) - 1.$$

Można także pokazać, iż

**Twierdzenie 1.22.** *Współczynnik Kendalla z danej kopuli  $\mathcal{C}$  oraz kopuli przeżycia, o postaci  $\hat{\mathcal{C}}(v, z) = v + z - 1 + \mathcal{C}(1 - v, 1 - z)$ , dla  $(v, z) \in I^2$ , są sobie równe.*

Kolejną miarą dobrze znaną oraz spełniającą aksjomaty z definicji 1.18, jest współczynnik Spearmana, który nazywa się zamiennie współczynnikiem korelacji rang.

**Definicja 1.23.** Współczynnik  $\rho_S$  Spearmana zmiennych losowych  $(X_1, Y_1)$  określony jest wzorem

$$\rho_S = 3[P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)],$$

gdzie  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  i  $(X_3, Y_3)$  są niezależnymi wektorami losowymi o tej samej łącznej dystrybuancie.

Współczynnik Spearmana mierzy znormalizowaną różnicę prawdopodobieństwa zgodności i prawdopodobieństwa niezgodności dla pary wektorów losowych  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_3)$ , powstałych z realizacji trzech niezależnych wektorów losowych  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$ ,  $(X_3, Y_3)$  o tym samym rozkładzie [Nelsen 2006].

Podobnie jak w przypadku współczynnika Kendalla, dla zmiennych losowych o ciągłych dystrybuantach, miarę tę można obliczyć korzystając z kopuli zmiennych losowych.

**Twierdzenie 1.24.** *Współczynnik  $\rho_S$  Spearmana dla zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$  o ciągłych dystrybuantach i mających kopulę  $\mathcal{C}$ , jest postaci*

$$\rho_S = 12 \iint_{I^2} \mathcal{C}(v, z) d\mathcal{C}(v, z) - 3 = 12 \iint_{I^2} vz d\mathcal{C}(v, z) - 3. \quad (1.7)$$

Zamienna nazwa współczynnika korelacji rang wynika z tego, iż przetransformowane zmienne losowe  $U = F_1(X)$  oraz  $V = F_2(Y)$ , to właśnie rangi zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$ , a wzór (1.7.) można zapisać w postaci

$$\rho_S = 12 \iint_{I^2} vz d\mathcal{C}(v, z) - 3 = 12E(UV) - 3 = \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}(U)\text{Var}(V)}}.$$

Ostatnie wyrażenie z powyższego wzoru zwane jest współczynnikiem korelacji liniowej, w tym przypadku pomiędzy zmiennymi  $F_1(X)$  oraz  $F_2(Y)$ .

Najbardziej popularnym miernikiem zależności pomiędzy zmiennymi losowymi, szczególnie w przypadku zastosowań w naukach przyrodniczych czy ekonomii, cały czas pozostaje współczynnik korelacji liniowej Pearsona.

**Definicja 1.25.** Współczynnik korelacji liniowej  $\rho$  dla dwóch zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$ , posiadających skończony drugi moment, jest postaci

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

Z definicji, współczynnik ten określa poziom zależności pomiędzy dwoma zmiennymi losowymi *tylko* w aspekcie liniowym. Współczynnik ten nie jest miarą konkordancji w sensie definicji 1.18. Ważną własność współczynnika Pearsona, zwłaszcza w przypadku transformacji danych, pokazuje poniższy lemat.

**Lemat 1.26.** *Współczynnik korelacji liniowej jest niezmienniczy, tylko ze względu na ściśle rosnącą liniową transformację zmiennych.*

Warto tutaj także nadmienić, zwłaszcza w przypadku wnioskowania statystycznego, iż sytuacja, w której zachodzi  $\rho_{X,Y} = 0$ , w ogólności, nie implikuje niezależności zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$ . Powyższa własność wynika z faktu, iż współczynnik korelacji liniowej jest właściwą miarą zależności tylko dla pewnej rodziny rozkładów (w tym rozkład normalny czy  $t$  Studenta). W ogólności, wnioskowanie odnośnie charakteru zależności pomiędzy zmiennymi losowymi, tylko na bazie współczynnika korelacji liniowej, może prowadzić do wniosków znacząco odbiegających od rzeczywistej sytuacji – szereg przykładów zostało podanych w artykule Embrechtsa, McNeila oraz Straumanna [2002].

Kolejną miarą opisującą pewien rodzaj związku między danymi zmiennymi losowymi jest tzw. zależność w ogonach.

**Definicja 1.27.** Niech granice

$$\lambda_U = \lim_{v \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2v + \mathcal{C}(v, v)}{1 - v}$$

oraz

$$\lambda_L = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{C}(v, v)}{v}$$

będą skończone. Mówimy, że zmienne losowe  $X$  oraz  $Y$ , o ciągłych dystrybuantach odpowiednio  $F_1$  oraz  $F_2$  oraz kopuli  $\mathcal{C}$ , posiadają zależność w górnym ogonie, wtedy i tylko wtedy gdy  $\lambda_U \in (0, 1]$  lub brak tej zależności, gdy  $\lambda_U = 0$ . Analogicznie, w drugim przypadku mówimy o zależności w dolnym ogonie.

W kontekście probabilistycznym, zależność w ogonie górnym wyraża prawdopodobieństwo przekroczenia progu  $v$  przez  $F_1(X)$  pod warunkiem, że  $F_2(Y)$  przekroczy ten próg, w przypadku, gdy  $v$  dąży w granicy do 1 [Doman 2011]. Analogicznie, można wyrazić także zależność w ogonie dolnym. W formalny sposób, ujęto to w poniższym twierdzeniu.

**Twierdzenie 1.28.** *Niech dane będą zmienne losowe  $X$  oraz  $Y$  z dystrybuantami  $F_1$  oraz  $F_2$  odpowiednio oraz kopulą  $\mathcal{C}$  (oznaczamy  $F_1(X)$  przez  $U$ , a  $F_2(Y)$  przez  $V$ ). Wtedy*

$$\lambda_U = \lim_{v \rightarrow 1^-} P(U > v \mid V > v) = \lim_{v \rightarrow 1^-} P(V > v \mid U > v)$$

oraz

$$\lambda_L = \lim_{v \rightarrow 0^+} P(U \leq v \mid V \leq v) = \lim_{v \rightarrow 0^+} P(V \leq v \mid U \leq v).$$

Miary te nie są miarami konkordancji. Poniższe twierdzenie określa związek pomiędzy zależnościami w ogonach dla dwóch zmiennych z daną kopulą oraz związaną z nią kopulą przeżycia.

**Twierdzenie 1.29.** Niech  $X$  oraz  $Y$  będą zmiennymi losowymi z kopulą  $\mathcal{C}$ , i związaną z nią kopulą przeżycia  $\hat{\mathcal{C}}$ . Zachodzą wtedy następujące równości

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_U &= \lambda_L, \\ \hat{\lambda}_L &= \lambda_U,\end{aligned}$$

gdzie  $\hat{\lambda}_U, \hat{\lambda}_L$  oznaczają współczynniki zależności w ogonie górnym i dolnym, odpowiednio, związane z kopulą przeżycia.

## 1.4. Podstawowe rodziny kopuli

Poniżej przedstawiono najczęściej stosowane podczas modelowania rodziny kopuli. Każda z nich w odmienny sposób oddaje związek pomiędzy danymi zmiennymi losowymi.

**Definicja 1.30.** Kopulę postaci

1.  $\mathcal{C}(v, z) = \max(v + z - 1, 0)$  nazywamy **minimalną** i oznaczamy przez  $\mathcal{C}^-$ ,

2.  $\mathcal{C}(v, z) = \min(v, z)$  nazywamy **maksymalną** i oznaczamy przez  $\mathcal{C}^+$ ,

3.  $\mathcal{C}(v, z) = vz$  nazywamy **produktową** i oznaczamy przez  $\mathcal{C}^\perp$ ,

4.  $\mathcal{C}(v, z; \rho) = \Phi_g(\Phi^{-1}(v), \Phi^{-1}(z)) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(z)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{2\rho st - s^2 - t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt$

gdzie  $\Phi_g, \Phi$  oznaczają odpowiednio dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego dwuwymiarowego ze współczynnikiem korelacji  $\rho$  oraz jednowymiarowego, nazywamy kopulą **gaussowską** i oznaczamy przez  $\mathcal{C}^{ga}$ ,

5.  $\mathcal{C}(v, z; \rho, \nu) = t_{\nu, \rho}(t_\nu^{-1}(v), t_\nu^{-1}(z)) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(z)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{(\nu+2)}{2}} ds dt$

gdzie  $t_{\nu, \rho}, t_\nu$  oznaczają odpowiednio dystrybuanty rozkładu  $t$  Studenta dwuwymiarowego ze współczynnikiem korelacji  $\rho$  i liczbą stopni swobody  $\nu$  oraz jednowymiarowego, nazywamy kopulą **Studenta** i oznaczamy przez  $\mathcal{C}^t$ ,

6.  $\mathcal{C}^C(v, z; \theta) = \max\{(v^{-\theta} + z^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0\}$ ,  $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ , nazywamy kopulą **Claytona** i oznaczamy przez  $\mathcal{C}^C$ ,

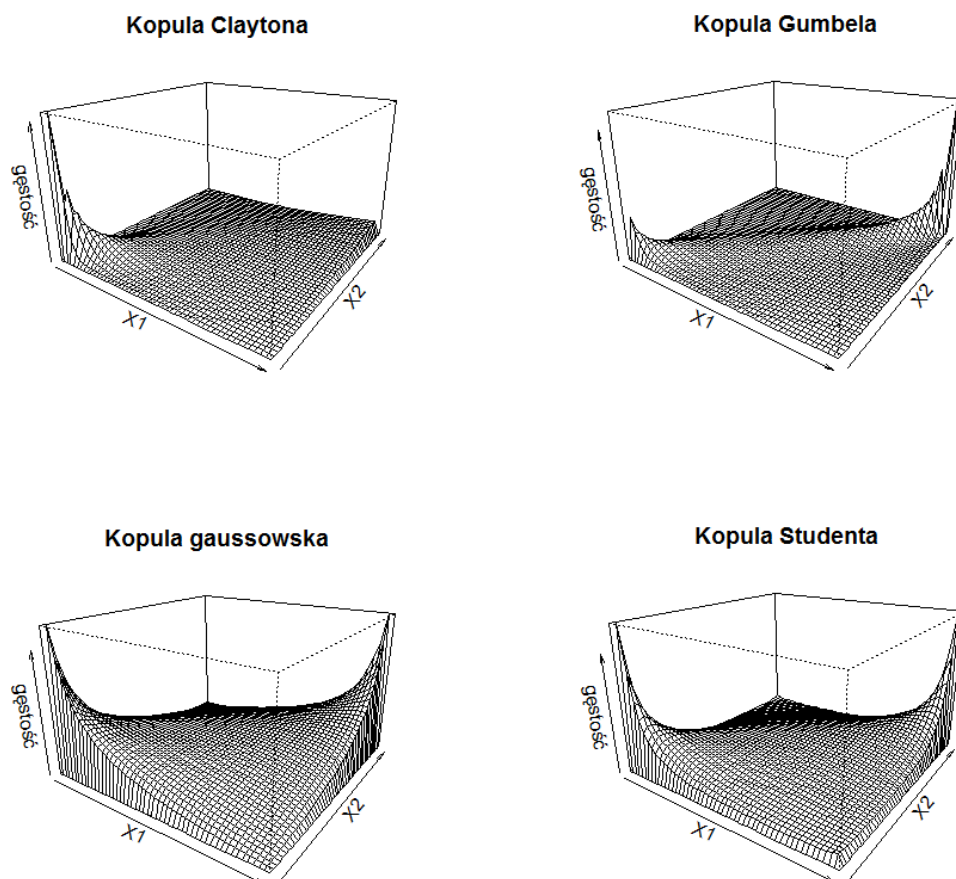
7.  $\mathcal{C}^{Gu}(v, z; \theta) = \exp\left(-\left((-\ln v)^\theta + (-\ln z)^\theta\right)^{1/\theta}\right)$ ,  $\theta \in [1, \infty)$ , nazywamy kopulą **Gumbela** i oznaczamy przez  $\mathcal{C}^G$ ,

8.  $\mathcal{C}^F(v, z; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta v} - 1)(e^{-\theta z} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$ ,  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , nazywamy kopulą **Franka** i oznaczamy przez  $\mathcal{C}^F$ .

Kopula minimalna przedstawia zależność doskonałą negatywną – zmienne losowe są tutaj doskonale niezgodne. Kopula maksymalna ukazuje zależność doskonałą dodatnią, tj. wraz ze wzrostem jednej ze zmiennych, druga również rośnie i na odwrót. Pomiedzy nimi jest kopula produktowa, która opisuje brak jakiegokolwiek zależności między zmiennymi.

Kopule gaussowska oraz Studenta są tzw. kopulami eliptycznymi, czyli kopulami rozkładów eliptycznych. W pierwszym przypadku jest to dwuwymiarowy rozkład normalny, natomiast w drugim rozkład  $t$  Studenta. Nośnikiem informacji dotyczącej zależności pomiędzy danymi zmiennymi losowymi jest tutaj parametr  $\rho$ , który jest współczynnikiem korelacji liniowej Pearsona. W przypadku gdy liczba swobody  $\nu$  zbiega do nieskończoności, kopula Studenta zbiega do kopuli gaussowskiej. W przypadku skończonej liczby stopni swobody, różnica w rozkładzie pomiędzy tymi dwoma kopulami jest istotna, zwłaszcza kiedy uwzględni się ogony rozkładów.

Kopula Claytona, Gumbela oraz Franka pochodzą z rodziny kopuli archimedesowych, które są tworzone na bazie tzw. generatorów, tj. funkcji określających charakter powiązań pomiędzy zmiennymi losowymi. Dobierając odpowiedni generator, jesteśmy w stanie zadać kopulę o zależnościach tylko w jednym z ogonów, tak jak ma to miejsce w przypadku np. kopuli Claytona czy Gumbela. Rysunek 1.2 przedstawia wykresy gęstości czterech kopuli często wykorzystywanych w trakcie estymacji.



**Rysunek 1.2.** Gęstości kopuli, odpowiednio, Claytona, Gumbela, gaussowskiej i Studenta

## 1.5. Kopula warunkowa

Podczas analizy szeregów czasowych często stajemy przed problemem analizy danej zmiennej losowej warunkowo względem drugiej zmiennej. Niestety, uzyskanie definicji kopuli warunkowej nie jest możliwe w sposób naturalny jak dla rozkładu warunkowego [Patton 2002].

Rozważmy teraz zmienne losowe  $(X, Y, W)$ , określone na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Przez  $F$  oznaczajmy dystrybuantę warunkową  $(X, Y)|W$ , a przez  $F_1$  oraz  $F_2$ , odpowiednio, dystrybuantę warunkową zmiennej  $X|W$  oraz  $Y|W$ . Bez straty ogólności możemy założyć, iż zmienna warunkująca jest wymiaru 1.

**Definicja 1.31.** *Kopula warunkowa*

Kopula warunkowa pary zmiennych losowych  $(X, Y)$  pod warunkiem  $W$ , gdzie  $X|W \sim F_1$  oraz  $Y|W \sim F_2$ , jest warunkową łączną dystrybuantą zmiennych losowych  $U \equiv F_1(X|W)$  oraz  $V \equiv F_2(Y|W)$  pod warunkiem  $W$ .

Innymi słowy kopulę warunkową możemy zdefiniować poprzez równość:

$$F(X, Y|W) \equiv \mathcal{C}(F_1(X|W), F_2(Y|W)|W). \quad (1.8)$$

Kopulę warunkową można otrzymać z dowolnego łącznego rozkładu danych zmiennych losowych  $U, V, W$  – jest to łączny warunkowy rozkład dwóch pierwszych zmiennych losowych względem pozostałej zmiennej, taki że jest to kopuła dla wszystkich wartości zmiennej warunkującej [Patton 2002].

Trzeba tutaj podkreślić, że zbiór wartości zmiennej warunkującej musi być jednakowy dla rozkładów brzegowych i dla kopuli. W przypadku niespełnienia tego warunku, funkcja zdefiniowana przez równość 1.8 nie jest łączną dystrybuantą warunkową. Teoretyczny przykład można znaleźć w artykule Pattona [2006].

Mając zdefiniowaną kopulę warunkową, możemy sformułować rozszerzone twierdzenie Sklara.

**Twierdzenie 1.32** (Twierdzenie Sklara dla warunkowych rozkładów o ciągłych dystrybuantach (Patton 2002)). *Niech  $F_1$  będzie warunkową dystrybuantą zmiennej  $X|W$ ,  $F_2$  warunkową dystrybuantą zmiennej  $Y|W$ , a przez  $F$  oznaczmy łączną warunkową dystrybuantę zmiennych  $(X, Y)|W$ . Załóżmy, że  $F_1$  oraz  $F_2$  są ciągłe. Istnieje jednoznacznie określona kopuła warunkowa  $\mathcal{C}$  taka, że:*

$$F(x, y|w) = \mathcal{C}(F_1(x|w), F_2(y|w)|w), \quad \text{dla każdego } (x, y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \text{ i } w \in W \quad (1.9)$$

*Odwrotnie, jeżeli  $F_1$  jest warunkową dystrybuantą zmiennej  $X|W$ ,  $F_2$  jest warunkową dystrybuantą zmiennej  $Y|W$ , a  $\mathcal{C}$  jest ich warunkową kopulą, to funkcja zdefiniowana przez równanie (1.9), jest dwuwymiarową warunkową dystrybuantą z dystrybuantami brzegowymi  $F_1$  oraz  $F_2$ .*

## 1.6. Pojęcie wielowymiarowego procesu stochastycznego

Rozważmy teraz rodzinę  $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ,  $\mathbf{X}_t = (X_{1,t}, \dots, X_{k,t})'$ , wektorowych zmiennych losowych określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Rodzinę tę będziemy nazywać *k-wymiarowym procesem stochastycznym*. Odwzorowanie  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $t \mapsto \mathbf{X}_t(\omega_0)$ , dla pewnego  $\omega_0 \in \mathbb{R}^k$ , zapisujemy jako  $(\mathbf{x}_t)$  i nazywamy *realizacją procesu  $\mathbf{X}$* , odpowiadającą zdarzeniu elementarnemu  $\omega_0$ . Realizację procesu stochastycznego będziemy również zamiennie określać jako *szereg czasowy*. Jeśli nie będzie to prowadziło do nieporozumień, szeregiem czasowym będziemy również nazywać sam proces stochastyczny.

W dalszym ciągu będziemy zakładać, iż obserwowane w kolejnych odstępach czasu ceny danych instrumentów finansowych są właśnie realizacjami pewnego wielowymiarowego procesu stochastycznego. Podstawowym pojęciem w analizie szeregów czasowych jest stacjonarność, która może być definiowana w mocniejszej lub słabszej postaci.



**Definicja 1.33.** *Szereg ściśle stacjonarny*

Szereg  $k$ -wymiarowy  $\mathbf{r}_t$  nazywamy ściśle stacjonarnym, jeśli dla dowolnego ciągu indeksów  $t_1, \dots, t_k$  i dowolnego  $l$ , łączny rozkład wektora losowego  $(\mathbf{r}_{t_1}, \mathbf{r}_{t_2}, \dots, \mathbf{r}_{t_k})$  jest taki sam, jak łączny rozkład wektora  $(\mathbf{r}_{t_1+l}, \mathbf{r}_{t_2+l}, \dots, \mathbf{r}_{t_k+l})$ .

**Definicja 1.34.** *Szereg kowariancyjnie (słabo) stacjonarny*

Szereg  $k$ -wymiarowy  $\mathbf{r}_t$  nazywamy kowariancyjnie (słabo) stacjonarnym, gdy momenty pierwszego i drugiego rzędu są skończone i niezmiennicze w czasie, tj. gdy  $E(\mathbf{r}_t) = \boldsymbol{\mu}$  i  $\text{Cov}(\mathbf{r}_t, \mathbf{r}_{t+l}) = \boldsymbol{\Gamma}_l$ , dla dowolnych indeksów  $t$  i  $l$ .

Trzeba tutaj zaznaczyć, iż ścisła stacjonarność szeregu nie implikuje słabej stacjonarności. Odwrotnie, słaba stacjonarność nie implikuje ścisłej stacjonarności szeregu. W przypadku wielu modeli, często wykorzystywany jest następujący proces:

**Definicja 1.35.** *Biały szum*

Jeżeli wektorowy szereg czasowy  $(\mathbf{r}_t)$  jest kowariancyjnie stacjonarny oraz  $\boldsymbol{\Gamma}_l = 0$  dla każdej wartości  $l \neq 0$ , to szereg taki nazywamy białym szumem.

Pojęcie stacjonarności szeregu jest fundamentalne, jeśli chodzi o problem modelowania. Wynika to z następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 1.36.** *Każdy szereg kowariancyjnie stacjonarny,  $\mathbf{r}_t$  o zerowej średniej, może zostać przedstawiony w postaci*

$$\mathbf{r}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Gamma}_i \mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\eta}_t,$$

gdzie  $\boldsymbol{\Gamma}_i$  jest macierzą wymiaru  $k \times k$ , o własnościach:  $\boldsymbol{\Gamma}_0 = \mathbf{I}_k$ , szereg  $\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{\Gamma}_i \boldsymbol{\Gamma}_i^T$  jest zbieżny;  $\mathbf{y}_t$  jest  $k$ -wymiarowym białym szumem, a  $\boldsymbol{\eta}_t$  liniowym procesem deterministycznym (zob. Hamilton (1994)).

## 2. Modelowanie wielowymiarowego procesu stochastycznego

Podczas analizy nieznanego procesu stochastycznego, którego realizację obserwujemy w postaci szeregu czasowego, pojawia się oczywisty problem modelowania jego trajektorii. Jedną z możliwości próby przybliżenia rzeczywistego procesu jest wykorzystanie informacji z bezpośredniej przeszłości. Jest to tak zwane modelowanie szeregu czasowego sterowanego poprzez obserwację. Ewolucja w czasie parametrów danego modelu jest indukowana przez ich funkcyjną zależność od ich własnych wcześniejszych wartości, zmiennych egzogenicznych i informacji o historii procesu. Elementy stochastyczne są związane z losowym generowaniem „zaburzeń”. Drugą możliwością próby opisu dynamiki procesu jest wykorzystanie tzw. zmiennych ukrytych. Dynamika parametrów jest w tym przypadku indukowana przez proces stochastyczny z własnym źródłem losowości [Doman 2011]. Taka kategoryzacja została po raz pierwszy użyta przez Coxa w roku 1981 i została powszechnie przyjęta w literaturze [Cox 1981]. Na przestrzeni ostatnich 40 lat powstało wiele modeli uwzględniających takie podejścia. W tym podrozdziale chciałbym przedstawić najczęściej stosowane modele zarówno pod względem teoretycznym, jak i w kontekście zastosowań. Przegląd ten zaczynam od modeli nieuwzględniających wykorzystania kopuli, a następnie przechodzę do modeli, które tę funkcję wykorzystują.

### 2.1. Model wektorowej autoregresji i średniej ruchomej

Niech  $\mathbf{r}_t = (r_{1,t}, r_{2,t}, \dots, r_{k,t})'$  będzie  $k$ -wymiarowym szeregiem. Model wektorowej autoregresji i średniej ruchomej rzędu  $p$  i  $q$  (tzw. VARMA( $p, q$ )) ma postać

$$\mathbf{r}_t = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{r}_{t-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{r}_{t-p} + \Theta_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \Theta_q \mathbf{y}_{t-q} + \mathbf{y}_t, \quad (2.1)$$

gdzie  $\Phi_0$  jest  $k$ -wymiarowym wektorem stałym,  $\mathbf{y}_t$  jest białym szumem, a  $\Phi_i$  oraz  $\Theta_i$  są macierzami o wymiarach  $k \times k$ . Warunkiem koniecznym i dostatecznym kowariancyjnej stacjonarności procesu generowanego przez ten model jest, by wszystkie pierwiastki wielomianu  $\det(\mathbf{I} - \Phi_1 L - \dots - \Phi_p L^p)$  miały moduły większe od 1, gdzie operator  $L$  definiujemy jako  $L^p \mathbf{r}_t = \mathbf{r}_{t-p}$ , dla  $p \in \mathbb{Z}$  [Tsay 2005].

Widzimy, że dana składowa bieżącego wektora losowego zależy w sposób liniowy od wcześniejszych realizacji, zarówno swoich, jak i pozostałych składowych oraz poprzednich wartości składnika losowego. Model ten wykorzystując informację o zależnościach pierwszego rzędu, pozwala na prognozowanie warunkowej wartości oczekiwanej analizowanego szeregu czasowego.

## 2.2. Model stałej macierzy korelacji warunkowych

Rozważmy ponownie wielowymiarowy szereg  $\mathbf{r}_t = (r_{1,t}, r_{2,t}, \dots, r_{k,t})'$  i rozpatrzmy jego dekompozycję postaci:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{y}_t, \quad (2.2)$$

gdzie  $\boldsymbol{\mu}_t = E(\mathbf{r}_t | \mathcal{F}_{t-1})$  jest warunkową wartością oczekiwaną  $\mathbf{r}_t$  przy zbiorze informacji  $\mathcal{F}_{t-1}$  do momentu  $t - 1$ . Część tę zatem możemy modelować za pomocą modeli liniowych np. klasy VARMA. Komponent  $\mathbf{y}_t$  możemy interpretować jako wektor zaburzeń. Możemy go zapisać jako:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (2.3)$$

gdzie  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  są niezależnymi wektorami losowymi o tym samym rozkładzie i własnościach:  $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') = \mathbf{I}_k$ , a  $\mathbf{H}_t^{1/2}$  jest symetryczną oraz dodatnio określoną macierzą wymiaru  $k \times k$ , mierzalną względem  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{F}_{t-1}$  taką, że  $\mathbf{H}_t^{1/2} (\mathbf{H}_t^{1/2})' = \mathbf{H}_t$ . Przy takiej specyfikacji  $\mathbf{H}_t$ , jest ona warunkową macierzą kowariancji procesu  $\mathbf{r}_t$ .

W 1990 roku Bollerslev zaproponował specyfikację macierzy kowariancji postaci:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t = \left( \rho_{ij} \sqrt{h_{ii,t} h_{jj,t}} \right),$$

gdzie

$$\mathbf{D}_t = \text{diag} \left( \sqrt{h_{11,t}}, \dots, \sqrt{h_{kk,t}} \right), \quad (2.4)$$

macierz  $\mathbf{R}$  jest symetryczna i dodatnio określona z jedynkami na głównej przekątnej, a  $h_{ii,t}$  może być interpretowane i modelowane jako wariancja warunkowa, np. o postaci:

$$h_{ii,t} = \omega_{i,t} + \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} y_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} h_{ii,t-j}, \quad (2.5)$$

gdzie  $i = 1, \dots, k$  [Doman i Doman 2009].

## 2.3. Model zmiennej macierzy korelacji warunkowych

Założenie stałej w czasie macierzy korelacji warunkowych jest dość arbitralne i w przypadku np. zwrotów akcji, empirycznie zaprzeczone [Erb i in. 1994, Longin i Solnik 1995, Engle 2002]. Rozwinięciem modelu CCC, w którym macierz korelacji ma postać dynamiczną, zaproponował Engle w roku 2002. Macierz kowariancji warunkowych zapisana jest w postaci:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t,$$

gdzie  $\mathbf{D}_t$  ma postać jak w równaniu (2.4), a  $h_{ii,t}$  można modelować jak w równaniu (2.5). Jednakże w tym przypadku macierz korelacji warunkowej jest postaci:

$$\mathbf{R}_t = \text{diag}\{\mathbf{Q}_t\}^{-1/2} \mathbf{Q}_t \text{diag}\{\mathbf{Q}_t\}^{-1/2},$$

gdzie macierz  $\mathbf{Q}_t$  opisana jest wzorem

$$\mathbf{Q}_t = \bar{\mathbf{Q}} \left( 1 - \sum_{m=1}^N \alpha_m - \sum_{n=1}^N \beta_n \right) + \sum_{m=1}^M \alpha_m \mathbf{D}_{t-m}^{-1} \mathbf{y}_{t-m} \left( \mathbf{D}_{t-m}^{-1} \mathbf{y}_{t-m} \right)' + \sum_{n=1}^N \beta_n \mathbf{Q}_{t-n}.$$

Macierz  $\bar{\mathbf{Q}}$  jest macierzą kowariancji z próby wektora  $\mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{y}_t$ . Z definicji postaci modelu DCC, składowe macierzy korelacji warunkowych podlegają jednakowej dynamice, co jest dosyć arbitralnym założeniem.

## 2.4. Model Copula-GARCH

Rozważane dotychczas modele ujmowały jedynie informację związaną z pierwszym oraz drugim momentem analizowanego procesu. Wprowadzone przez Pattona pojęcie kopuli warunkowej pozwala także na zastosowanie kopuli do modelowania wielowymiarowego procesu stochastycznego, warunkowego względem zbioru informacji  $\mathcal{F}_{t-1}$  do momentu  $t-1$ . W takim przypadku modelowana jest (z własności kopuli) cała informacja o zależnościach. W sensie ogólnym, model ten można przedstawić następująco [Patton 2012]:

$$F_t(\mathbf{r}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathcal{C}_t(F_{1,t}(r_{1,t} | \mathcal{F}_{t-1}), \dots, F_{k,t}(r_{k,t} | \mathcal{F}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}), \quad (2.6)$$

gdzie  $F_t(\cdot | \mathcal{F}_{t-1})$  jest warunkową dystrybuantą wektora  $\mathbf{r}_t$ , a  $F_{i,t}(\cdot | \mathcal{F}_{t-1})$  są dystrybuantami warunkowymi zmiennych  $r_{i,t}$ , gdzie  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Trzeba tutaj podkreślić, iż zbiór informacji  $\mathcal{F}_{t-1}$  jest taki sam dla rozkładów brzegowych i dla kopuli. W przypadku konkretnej specyfikacji, model może mieć postać

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_t &= \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{y}_t, \\ \boldsymbol{\mu}_t &= \mathbb{E}(\mathbf{r}_t | \mathcal{F}_{t-1}), \\ y_{i,t} &= \sqrt{h_{i,t}} z_{i,t}, \\ h_{i,t} &= \text{Var}(r_{i,t} | \mathcal{F}_{t-1}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie dla  $i = 1, \dots, k$ ,  $z_{i,t}$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie standaryzowanym. Można przyjąć tutaj szereg znanych rozkładów, w tym rozkład normalny. Do opisu średniej warunkowej można wykorzystać model VARMA zaprezentowany w podrozdziale 2.1. Modelowanie wariancji warunkowej realizowane jest poprzez modelowanie wariancji warunkowych jednowymiarowych, z wykorzystaniem różnych specyfikacji rodziny jednowymiarowych modeli GARCH.

## 2.5. Dynamiczne modele Copula-GARCH oraz Copula-GAS

Dotychczas zakładaliśmy, iż wektor parametrów kopuli opisujący zależność pomiędzy analizowanymi zmiennymi jest stały w czasie. Takie założenie jest czysto arbitralne i często może prowadzić do złej specyfikacji procesu. Poniżej przedstawiono modele uwzględniające dynamiczne modelowanie parametrów kopuli.

Intuicyjne podejście do problemu zmienności parametru, w przypadku procesu dwuwymiarowego, możemy przedstawić w postaci równania

$$\theta_t = \Lambda \left( \omega + \alpha \cdot \Lambda^{-1}(\theta_{t-1}) + \beta \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F^{-1}(F_{1,t-i+1}(r_{1,t-i+1}|\mathcal{F}_{t-i})) F^{-1}(F_{2,t-i+1}(r_{2,t-i+1}|\mathcal{F}_{t-i})) \right),$$

gdzie  $\theta$  jest modelowanym parametrem,  $F$  jest dystrybuantą odpowiedniego rozkładu zależnego od doboru kopuli,  $\Lambda$  odpowiednią transformatą, umożliwiającą ograniczenie wartości modelowanego parametru do wymaganego przez specyfikację modelu zakresu, a  $n$  „długością pamięci” dobraną w sposób arbitralny [Patton 2002]. Model ten uwzględnia trwałość dynamiki parametru poprzez zawieranie informacji o wielkości parametru z poprzedniego okresu oraz pseudoestymator uśrednionej zależności.

Creal, Koopman i Lucas [2013] zaproponowali klasę modeli, w których zmienność parametru w czasie związana jest pośrednio z funkcją wiarygodności. W ogólnej postaci model ten przedstawia się następująco:

$$\theta_{t+1} = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot \theta_{t-i+1} + \sum_{j=1}^q \beta_j \cdot I_t^{-1/2} s_{t-j+1}$$

gdzie  $\theta$  jest modelowanym parametrem,  $s_t = \frac{\partial \log c(u_t, v_t; \theta)}{\partial \theta}$ ,  $u_t = F_{1,t}(r_{1,t}|\mathcal{F}_{t-1})$ ,  $v_t = F_{2,t}(r_{2,t}|\mathcal{F}_{t-1})$ ,  $c$  jest gęstością kopuli, a  $I_t = E_{t-1}(s_t^2)$  jest informacją Fishera. Jeśliby funkcję  $s_t$  nazwać funkcją wynikową (ang. *score function*), to model GAS (ang. *generalized autoregressive score*) Creala, Koopmana i Lucasa można by nazwać uogólnionym autoregresyjnym modelem wynikowym. Bazuje on na połączeniu informacji o poprzednich wartościach danego parametru z wykorzystaniem standaryzowanej funkcji wynikowej. Funkcja wynikowa, jako gradient logarytmicznej funkcji wiarygodności kopuli względem modelowanego parametru w czasie  $t$ , wskazuje kierunek zmiany wartości parametru w kontekście dopasowania gęstości [Creal, Koopman i Lucas 2013].

Warto tutaj zaznaczyć, iż funkcja wynikowa bazuje na gęstości kopuli, a nie tylko na pierwszym lub drugim momencie obserwowanego procesu. Powoduje to wykorzystanie pełni informacji dotyczącej opisywanego procesu. Model GAS jest zatem bezpośrednim uogólnieniem modelu zaproponowanego przez Pattona.

Trzeba tutaj wyraźnie zaznaczyć, iż powyższa lista nie uwzględnia szeregu innych modeli, które są wykorzystywane podczas modelowania szeregów czasowych. Są to m. in.

takie modele jak: BEKK [Engle i Kroner 1995], przełącznikowe modele kopuli dynamicznej [Rodriguez 2007, Doman 2010], model  $D$ -pnącz [Min i Czado 2010], semiparametryczny model kopuli dynamicznej SDC [Hafner i Reznikova 2010], model kopuli ze stochastyczną dynamiką parametrów SCAR [Hafner i Manner 2010], model zmiennej macierzy korelacji warunkowej z wykorzystaniem kopuli [Bodnar i Hautsch 2012] czy model zmiennej macierzy kowariancji z wykorzystaniem kopuli [Lee i Long 2009].

### 3. Estymacja modelu

W przypadku rozważania modeli wielowymiarowych opartych na kopulach, nie jest możliwe wykorzystanie szeregu wyników z klasycznej teorii wnioskowania statystycznego dotyczących m.in. statystyk dostatecznych, statystyk pomocniczych czy estymatorów nieobciążonych o minimalnej wariancji. Dodatkowo, w większości przypadków, wykorzystywane estymatory nie mają postaci analitycznej i często jedyną możliwością estymacji jest procedura numeryczna. Najczęściej wykorzystywanym podejściem jest estymacja metodą największej wiarygodności. W przypadku wielowymiarowego modelu, w którym musimy wyspecyfikować rozkłady brzegowe oraz model kopuli, powstaje problem zbieżności oraz odporności estymatorów. W ciągu ostatnich 20 lat powstało szereg metod próbujących przezwyciężyć ten problem, m.in. metoda kanoniczna czy metoda dwustopniowa.

W poniższych podrozdziałach zostaną opisane wymienione powyżej metody estymacji wraz z własnościami asymptotycznymi estymatorów. W każdym z przypadków będzie to oznaczało zbieżność według rozkładu. O ciągu wektorów losowych  $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots\}$  mających dystrybuanty  $G_1, G_2, \dots$  mówimy, że zbiega według rozkładu do wektora losowego  $\mathbf{X}$  mającego dystrybuantę  $F$  jeżeli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$$

dla każdego  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ , który jest punktem ciągłości dystrybuanty  $F$ . Stosujemy w takiej sytuacji oznaczenie

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}.$$

Niech dany będzie ciąg niezależnych wielowymiarowych prób losowych  $(\mathbf{x}_t)_{t \in T}$ ,  $\mathbf{x}_t = (x_{1,t}, \dots, x_{k,t})'$ , gdzie  $T$  to wielkość próby, a  $k \in \mathbb{N}$ . Wektory losowe pochodzą z rozkładu o ciągłej łącznej dystrybuancie  $F$ , z dystrybuantami brzegowymi  $F_1, \dots, F_k$  oraz związaną z nią kopulą  $\mathcal{C}$ .

#### 3.1. Modele parametryczne z kopulą statyczną

W pierwszej kolejności rozpatrujemy przypadek, w którym estymowany model jest w pełni parametryczny.

##### 3.1.1. Metoda największej wiarygodności

Najczęściej wykorzystywaną metodą estymacji parametrów kopuli w przypadku, gdy model jest w pełni parametryczny, jest metoda największej wiarygodności. Rozważmy postać łącznej gęstości  $f$  wektora losowego  $\mathbf{X}$  – ponieważ wektor ten pochodzi z rozkładu, którego strukturę zależności zadaje kopula  $\mathcal{C}$ , możemy wykorzystać postać kanoniczną gęstości według równości (1.5) dla przypadku  $k$ -wymiarowego. Reprezentacja kanoniczna gęstości

dla realizacji procesu w momencie  $t$  ma wówczas postać

$$f(x_{1,t}, \dots, x_{k,t}) = c(F_1(x_{1,t}), \dots, F_k(x_{k,t})) \cdot \prod_{i=1}^k f_i(x_{i,t}).$$

Zlogarytmowana funkcja wiarygodności dla próby, wobec powyższego, ma postać

$$\begin{aligned} L(\Theta; \mathbf{x}) &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_{1,t}), \dots, F_k(x_{k,t}); \Theta) + \\ &+ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^k \log f_i(x_{i,t}; \Theta), \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)' \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$  jest wektorem parametrów gęstości kopuli oraz gęstości brzegowych. Powyższe wyrażenie maksymalizujemy w celu uzyskania estymatora największej wiarygodności postaci

$$\hat{\Theta}_{MLE} = \operatorname{argmax}_{\Theta} L(\Theta). \quad (3.2)$$

Estymator ten, przy spełnieniu odpowiednich założeń regularności, mianowicie:

1.  $\Theta$  jest otwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^p$ ,
2. dla różnych wartości parametru  $\Theta$ , rozkłady  $P_{\Theta}$  z rodziny miar  $\mathcal{P} = \{P_{\Theta} : \Theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p\}$  są różne,
3. rozkłady  $P_{\Theta}$  mają wspólny nośnik, tj. zbiór  $S = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}; \Theta) > 0\}$  jest taki sam dla każdego  $\Theta \in \Theta$ ,
4. dla prawie wszystkich  $\mathbf{x}$  w każdym punkcie  $\Theta \in \Theta$  istnieją wszystkie pochodne rzędu trzeciego

$$\frac{\partial^3 f(\mathbf{x}; \Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k},$$

5. dla każdego  $\Theta \in \Theta$  mamy

$$E_{\Theta} \left[ \frac{\partial \log f(\mathbf{X}; \Theta)}{\partial \Theta} \right] = \mathbf{0}$$

6. można dwukrotnie różniczkować pod znakiem całki wyrażenie

$$\int f(\mathbf{x}; \Theta) \, d\mathbf{x},$$

7. macierz informacji Fishera postaci

$$\mathbf{I}(\Theta) = E_{\Theta} \left[ \frac{-\partial^2 \log f(\mathbf{X}; \Theta)}{\partial \Theta \partial \Theta'} \right]$$



jest skończona i dodatnio określona,

8. istnieją funkcje  $M_{ijk}$ , takie że

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \log f(\mathbf{x}; \Theta) \right| \leq M_{ijk}(\mathbf{x}), \quad \text{dla każdego } \Theta \in \Theta,$$

gdzie  $m_{ijk} = E_{\Theta}[M_{ijk}(\mathbf{X})] < \infty$ , dla wszystkich  $i, j, k$ ,

posiada bardzo ważne własności, które podaje twierdzenie 3.1.

**Twierdzenie 3.1** (zob. Krzyśko 2009). *Niech  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  będą niezależnymi wektorami losowymi o jednakowym rozkładzie z gęstością  $f(\mathbf{x}; \Theta)$  względem miary  $P$ , spełniającym założenia 1 – 8. Wówczas z prawdopodobieństwem 1 istnieją rozwiązania  $\Theta_n$  równania (3.2), takie że:*

1.  $\hat{\Theta}_n$  jest estymatorem zgodnym parametru  $\Theta$ ,
2. wektor losowy  $\sqrt{n}(\hat{\Theta}_n - \Theta)$  ma asymptotycznie rozkład normalny o średniej  $\mathbf{0}$  i macierzy kowariancji  $\mathbf{\Gamma}^{-1}(\Theta)$ ,
3. estymator  $\hat{\theta}_{i,n}$  jest asymptotycznie efektywny, tj.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{i,n} - \theta_i) \xrightarrow{D} N(0, (\mathbf{\Gamma}^{-1}(\Theta))_{i,i}),$$

gdzie  $(\mathbf{\Gamma}^{-1}(\Theta))_{i,i}$  jest  $(i, i)$ -tym elementem macierzy  $\mathbf{\Gamma}^{-1}(\Theta)$ .

### 3.1.2. Metoda dwustopniowa

Klasyczna metoda największej wiarygodności, w przypadku estymacji modelu więcej niż dwuwymiarowego, często bywa problematyczna obliczeniowo. Spowodowane jest to równoległą estymacją parametrów rozkładów brzegowych oraz parametrów odpowiadających za zależność pomiędzy zmiennymi, reprezentowaną przez kopulę. Analizując zlogarytmowaną funkcję wiarygodności z równania (3.1), widzimy, że składa się ona z sumy dwóch części. Pierwszy człon wykorzystuje gęstość kopuli, natomiast drugi gęstości rozkładów brzegowych. Wykorzystując ten fakt, Xu [1996] zaproponował metodę funkcji wnioskowania dla rozkładów brzegowych (ang. *inference for margins*, IFM). W pierwszym kroku wyznaczamy estymatory parametrów gęstości brzegowych, maksymalizując wyrażenie:

$$\hat{\Theta}_1 = \operatorname{argmax}_{\Theta_1} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^k \log f_i(x_{i,t}; \Theta_1). \quad (3.3)$$

W drugim kroku, mając oszacowany wektor parametrów rozkładów brzegowych  $\Theta_1$ , maksymalizujemy sumę gęstości kopuli, względem wektora parametrów  $\Theta_2$  kopuli:

$$\hat{\Theta}_2 = \operatorname{argmax}_{\Theta_2} \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_{1,t}), \dots, F_k(x_{k,t}); \hat{\Theta}_1). \quad (3.4)$$

Estymator postaci  $\hat{\Theta}_{IFM} = (\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2)$  posiada następujące własności:

**Twierdzenie 3.2** (Joe 1997). *Przy spełnieniu odpowiednich warunków regularności, estymator  $\hat{\Theta}_{IFM}$  istnieje, jest zgodny oraz asymptotycznie posiada rozkład normalny, tj.*

$$\sqrt{T} (\hat{\Theta}_{IFM} - \Theta) \xrightarrow{D} N(0, G_{IFM}^{-1}),$$

przy  $T \rightarrow \infty$ , gdzie  $G_{IFM}$  to macierz informacji Godambe postaci

$$(G_{i,j}) = E_{\Theta} \left[ \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x}; \Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \left( E_{\Theta} \left[ \frac{\partial \log f(\mathbf{x}; \Theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log f(\mathbf{x}; \Theta)}{\partial \theta_j} \right] \right)^{-1} E_{\Theta} \left[ \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{x}; \Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]'$$

Metoda ta znacząco ułatwia estymację, dzieląc ją na dwa etapy. Wektor parametrów uzyskanych za jej pomocą jest także dobrym wektorem startowym do estymacji klasyczną metodą największej wiarygodności. Należy tutaj podkreślić, iż w ogólności nie zachodzi równość estymatorów  $\hat{\Theta}_{IFM}$  oraz  $\hat{\Theta}_{MLE}$ , a estymator metody dwustopniowej jest mniej efektywny niż estymator uzyskany metodą klasyczną. Badania pokazują jednakże, że różnica pomiędzy tymi dwoma metodami w większości przypadków nie jest znacząca [Patton 2006].

### 3.2. Modele semiparametryczne z kopulą statyczną

W przypadku finansowych szeregów czasowych wielkość próby statystycznej często pozwala na wykorzystanie estymatorów nieparametrycznych – zwłaszcza, jeżeli przedmiotem badań są szeregi o częstotliwości co najmniej dziennej. Z tego powodu wydaje się zasadnym wykorzystanie klasycznego empirycznego estymatora dystrybuanty brzegowej.

**Definicja 3.3.** Dystrybuantą empiryczną dla próby  $X_1, \dots, X_n$  pochodzącej z dowolnego rozkładu, nazywamy estymator postaci

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i < x\}. \quad (3.5)$$

Dla próby prostej o wielkości zbiegającej do nieskończoności zachodzi następujące twierdzenie zwane twierdzeniem Gliwienki-Cantellego:

**Twierdzenie 3.4** (zob. Krzyżko 1996). *Niech  $X_1, \dots, X_n$  będzie próbą prostą pochodzącą z rozkładu o dystrybuancie  $F$ . Dystrybuanta empiryczna z próby zbiega z prawdopodobień-*

stwem 1 do  $F$ , tj.

$$P \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \right) = 0 \right) = 1.$$

Jednakże, w przypadku estymacji kopuli, tj. rozkładu wielowymiarowego, estymatory nieparametryczne (uwzględniając do tego możliwą dużą zmianę zależności w czasie między zmiennymi brzegowymi) są niewystarczające. Konieczne zatem jest wykorzystanie estymatorów parametrycznych dla funkcji kopuli. Takie połączenie metod po raz pierwszy zaproponowali Genest, Ghoudi i Rivest [1995] dla ciągu niezależnych zmiennych losowych i nazwali to kanoniczną metodą największej wiarygodności (ang. *canonical maximum likelihood*, CML).

### 3.2.1. Kanoniczna metoda największej wiarygodności

Kanoniczną metodą największej wiarygodności można traktować jako szczególny przypadek metody dwustopniowej. W pierwszym kroku, dystrybuanty brzegowe uzyskujemy jako dystrybuanty empiryczne  $\hat{F}_i, i \in \{1, \dots, k\}$  o postaci z (3.5). W przypadku szeregów finansowych, wielkość próby (często powyżej 1000 obserwacji) daje podstawy do wykorzystania właśnie dystrybuanty empirycznej. W drugim etapie, wykorzystując empiryczne dystrybuanty brzegowe, maksymalizujemy zlogarytmowaną funkcję wiarygodności. Zatem za oszacowanie wektora parametrów przyjmujemy:

$$\hat{\Theta}_{CML} = \operatorname{argmax}_{\Theta} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log c(\hat{F}_1(x_{1,t}), \dots, \hat{F}_k(x_{k,t}); \Theta).$$

Jak widzimy, jest to metoda semiparametryczna, dzięki której w pierwszym kroku nie jesteśmy narażeni na błędną specyfikację rozkładów brzegowych. Również dla tej metody uzyskano pewne asymptotyczne właściwości:

**Twierdzenie 3.5** (Chen i Fan 2006). *Przy spełnieniu odpowiednich warunków regularności, semiparametryczny estymator  $\hat{\Theta}_{CML}$  istnieje, jest zgodny oraz asymptotycznie posiada rozkład normalny, tj.*

$$\sqrt{T}(\hat{\Theta}_{CML} - \Theta_{CML}) \xrightarrow{D} N(0, B^{-1}\Sigma B^{-1}),$$

gdzie

$$B_{ij} = -E_{\Theta} \left[ \frac{\partial^2 \log c(\hat{F}_1(x_1), \dots, \hat{F}_k(x_k); \Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$$

$$\Sigma_{ij} = E_{\Theta} \left\{ \left[ \frac{\partial \log c(\hat{F}_1(x_{1,t}), \dots, \hat{F}_k(x_{k,t}); \Theta)}{\partial \theta_i} + \sum_{l=1}^k Q_{l,\theta_i} \right] \right\}$$

$$+ \left[ \frac{\partial \log c(\widehat{F}_1(x_{1,t}), \dots, \widehat{F}_k(x_{k,t}); \Theta)}{\partial \theta_j} + \sum_{l=1}^k Q_{l,\theta_j} \right]'$$

$$Q_{l,\theta_i} = E_{\Theta} \left[ \frac{\partial^2 \log c(\widehat{F}_1(x_{1,t}), \dots, \widehat{F}_k(x_{k,t}); \Theta)}{\partial \widehat{F}_l(x_{l,t}) \partial \theta_i} \left[ \mathbf{1} \{ \widehat{F}_l(x_{l,s}) \leq \widehat{F}_l(x_{l,t}) \} - \widehat{F}_l(x_{l,t}) \right] | \widehat{F}_l(x_{l,s}) \right]$$

W przeciwieństwie do metod MLE oraz IFM, estymacja tym sposobem nie zapewnia efektywności. Co zaskakujące, w tym przypadku asymptotyczna wariancja estymatora nie zależy od filtracji, tj. dopasowania rodziny modeli ARMA-GARCH do średniej oraz wariancji warunkowej procesów brzegowych [Patton 2012].

### 3.3. Estymacja kopuli dynamicznej

Metody estymacji opisane powyżej dotyczyły wyłącznie kopuli statycznej – w takim przypadku wektor parametrów kopuli opisujący zależność pomiędzy analizowanymi zmiennymi jest stały w czasie. Założenie to jest czysto arbitralne, zwłaszcza w obliczu empirycznie potwierdzonych dowodów, iż np. warunkowa macierz korelacji dla zwrotów akcji podlega zmianie w czasie [Bauwens i in. 2006]. W takim przypadku możemy mówić o kopuli dynamicznej  $C_t$ , gdzie w specyfikacji modelu określamy dynamikę parametrów kopuli (np. za pomocą modeli opisanych w rozdziałach 2.5 – 2.8), z definicji odpowiedzialnych za charakter związku pomiędzy zmiennymi. Funkcja wiarygodności ma wówczas postać:

$$L(\Theta; \mathbf{x}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log c_t(F_{1,t}(x_{1,t} | \mathcal{F}_{t-1}), \dots, F_{k,t}(x_{k,t} | \mathcal{F}_{t-1}) | \mathcal{F}_{t-1}; \Theta) +$$

$$+ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^k \log f_{i,t}(x_{i,t} | \mathcal{F}_{t-1}; \Theta), \quad (3.6)$$

Estymacja parametrów modelu dynamicznej kopuli warunkowej przebiega analogicznie jak w przypadku metod opisanych w rozdziałach 3.1 – 3.3, poprzez maksymalizację logarytmu funkcji wiarygodności z równania (3.6). W trakcie estymacji numerycznej, równania określające dynamikę parametrów kopuli wykorzystywane są do określenia warunków ograniczających. Z uwagi na dodatkowe kroki optymalizacyjne spowodowane wprowadzaniem dynamiki parametrów kopuli, estymacja najczęściej jest wykonywana za pomocą metody dwustopniowej (IFM) lub metody kanonicznej (CML) [Doman 2011, Patton 2012].

W przypadku modeli zakładających dynamikę parametrów kopuli nie istnieją obecnie jednakże żadne teoretyczne wyniki związane z asymptotycznymi własnościami estymatorów parametrów. Związane jest to z problemem określenia warunków dostatecznych na stacjonarność procesu, które są wykorzystywane w standardowym podejściu do określenia własności asymptotycznych [Patton 2012]. W przypadku gdy analizowane modele na drodze symulacji spełniają określone warunki regularności, wyniki teoretyczne dla kopuli

statycznej mogą być w pewien sposób podstawą do wykorzystywania modeli dynamicznych.

### 3.4. Testy dobroci dopasowania

Testowanie dobroci dopasowania jest podstawowym zagadnieniem modelowania oceniającym, czy wybrany model jest istotnie różny od (nieznanego) badanego obiektu.

#### 3.4.1. Przypadek kopuli statycznej

W przypadku kopuli statycznych, literatura dotycząca tego zagadnienia jest obszerna. Przegląd najczęściej wykorzystywanych testów w przypadku kopuli statycznej wraz z porównaniem mocy można znaleźć w artykułach Berga [2009], Genesta, Rémillarda i Beaudoina [2009], a także Fermaniana [2013]. Formuła testu pokazana w kolejnym podrozdziale opiera się na procedurze oraz testach, które wykazywały największą moc w przypadku kopuli statycznych [Genest i in. 2009].

#### 3.4.2. Przypadek kopuli dynamicznej

W przypadku kopuli dynamicznej nie jest możliwe wykorzystanie kopuli empirycznej, która jest nieparametrycznym estymatorem kopuli statycznej [Patton 2012]. Na obecny moment, poza metodą transformaty Rosenblatta, trudno doszukać się w literaturze testów jakości dopasowania kopuli dynamicznej sensu stricto. Zakładając, iż zmienne losowe  $X_1, \dots, X_k$  mają odpowiednio dystrybuanty brzegowe  $F_1, \dots, F_k$  oraz kopulę  $\mathcal{C}$ , a  $T$  jest długością szeregu obserwacji, transformację Rosenblatta, dla danej realizacji wektora losowego i transformacji  $U_i = F_i(x_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , definiujemy jako  $\mathbf{V}_i$ , gdzie

$$\begin{aligned} V_{1,t} &= U_{1,t}, \quad \text{dla każdego } t \in T, \\ V_{2,t} &= \mathcal{C}_{2|1,t}(U_{2,t}|U_{1,t}), \\ &\vdots \\ V_{k,t} &= \mathcal{C}_{k|1,\dots,k-1,t}(U_{k,t}|U_{1,t}, \dots, U_{k-1,t}). \end{aligned}$$

Po takiej transformacji (przy założeniu hipotezy, iż model jest wybrany poprawnie), otrzymujemy wektor niezależnych zmiennych losowych o rozkładach jednostajnych, także wzajemnie niezależnych, co oznacza, że ich kopula ma postać [Rosenblatt 1952]:

$$\mathcal{C}_\perp(\mathbf{v}) = v_1 \cdot \dots \cdot v_k.$$

Problem testu dopasowania w takim przypadku sprowadza się do sprawdzenia, czy kopula empiryczna tak przetransformowanych zmiennych jest istotnie różna od kopuli produktowej. Do tego celu możemy wykorzystać klasyczną statystykę Kołmogorova-Smirnowa oraz

Craméra von Misesa. Formalnie:

$$KS = \max_t |\mathcal{C}_\perp(\mathbf{v}_t) - \hat{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_t)|,$$

$$CvM = \sum_{t=1}^T \{\mathcal{C}_\perp(\mathbf{v}_t) - \hat{\mathcal{C}}(\mathbf{v}_t)\}^2,$$

gdzie

$$\hat{\mathcal{C}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \prod_{i=1}^k \mathbf{1}\{V_{i,t} \leq v_i\}.$$

Podstawowym problemem tej metody jest arbitralność wyboru kolejnych zmiennych (przykładowo, przekształcenie za pomocą transformaty Rosenblatta wektora zwrotów logarytmicznych w różnych kolejnościach, daje różne wartości statystyki testowej). Kolejnym problemem są potencjalne problemy numeryczne z obliczeniem wartości kopuli warunkowych  $\mathcal{C}_{k|1,\dots,k-1,t}(U_{k,t}|U_{1,t}, \dots, U_{k-1,t})$ , szczególnie w przypadku dużych  $k$  [Fermanian 2013].

Trzeba tutaj także podkreślić fakt, iż najczęściej bazujemy na tzw. pseudoobserwacjach  $\hat{\mathbf{v}} := (\hat{F}_1(x_1), \dots, \hat{F}_k(x_k))$ , gdzie  $\hat{F}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , jest dystrybuantą empiryczną o postaci (3.5). W takim przypadku szereg  $\hat{\mathbf{v}}_t$ ,  $t \in \{1, \dots, T\}$  nie jest już szeregiem niezależnych zmiennych i tylko asymptotycznie zbiega do wektora o rozkładzie jednostajnym na  $[0, 1]^n$  [Berg 2009]. Stąd wymagane jest zastosowanie procedury bootstrapowej [Genest i in. 2009] polegającej na:

1. oszacowanie dystrybuant brzegowych oraz wektora parametrów kopuli  $\hat{\theta}$ ,
2. obliczeniu wartości statystyk  $KS_0, CvM_0$  na bazie danych z próby,
3. symulacji szeregu czasowego na bazie wyestymowanych parametrów  $\hat{\theta}$ ,
4. oszacowaniu dystrybuant brzegowych oraz wektora parametrów kopuli  $\hat{\theta}^s$  na bazie symulowanych szeregów,
5. obliczeniu wartości statystyki  $KS^s, CvM^s$  na bazie symulowanych danych,
6. powtórzeniu kroków (3 – 5)  $M$  razy, gdzie  $M$  to odpowiednio duża liczba,
7. obliczeniu  $p$ -wartości testu dla statystyki (np. w przypadku statystyki Kołmogorowa - Smirnowa)

$$p = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{1}\{KS_m^s \geq KS_0\}.$$

Zgodnie z moją wiedzą, nie istnieje żadna praca, w której analizowano by asymptotyczne właściwości powyższej metody w kontekście kopuli dynamicznej oraz żadne badanie dotyczące mocy takiego testu.

Możliwe jest także zamiast testowania, czy przetransformowane zmienne  $V_i$  są niezależne i mają standardowy rozkład jednostajny, sprawdzenie równoważnej hipotezy zerowej, że zmienne  $\Phi^{-1}(V_i)$ , gdzie  $\Phi$  jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego, są niezależne i mają standardowy rozkład normalny. Wtedy statystyka postaci

$$S = \sum_{i=1}^k (\Phi^{-1}(V_i))^2,$$

przy prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład  $\chi^2(k)$ . Także w tym przypadku możemy przeprowadzić test zgodności Kołmogorowa-Smirnowa czy Craméra-von Misesa. Dobrić i Schmid [2007] sugerują (z uwagi na dużą moc) wykorzystanie testu Andersona-Darlinga [Anderson i Darling 1954] o statystyce postaci

$$AD = -T - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (2t-1) [\log(F(S_t)) + \log(1 - F(S_{T-t+1}))],$$

gdzie  $F$  jest dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie  $\chi^2(k)$ , a  $S_i$ ,  $i \in \{1, \dots, T\}$ , pochodzą z próby uporządkowanej. Podobnie jak w przypadku metody poprzedniej, nie ukazały się badania, w których analizowano by moc testu z wykorzystaniem kopuli dynamicznej.

### 3.4.3. Kryteria informacyjne

Z powodu braku solidnych teoretycznych podstaw odnośnie testów dopasowania, często wykorzystywanymi miernikami oceny, który model najlepiej opisuje analizowane dane, są tzw. kryteria informacyjne. Do najpopularniejszych z nich należy kryterium informacyjne Akaike (AIC) oraz bayesowskie kryterium informacyjne (BIC) postaci

$$AIC(k) = -2L(\Theta; \mathbf{x}) + 2k,$$

$$BIC(k) = -2L(\Theta; \mathbf{x}) + k \log(T),$$

gdzie  $L(\Theta; \mathbf{x})$  to wartość logarytmu funkcji wiarygodności z równania (3.6) dla wektora  $\Theta$ , w którym osiąga maksimum,  $T$  jest wielkością próby, a  $k$  liczbą estymowanych parametrów. W obu przypadkach, spośród rodziny modeli, wybieramy ten, który minimalizuje powyższe kryteria [Burnham i Anderson 2002]. Z postaci kryteriów wynika, że ich minimalizacja jest równoznaczna z maksymalizacją funkcji wiarygodności. Drugi człon kryteriów jest tzw. „karą” za zbyt duże dopasowanie modelu. Zatem kryterium bayesowskie bardziej preferuje modele z mniejszą liczbą parametrów.

## 4. Ryzyko portfela oraz jego pomiar

Poprzednie trzy rozdziały, omawiające pojęcie kopuli oraz sposoby estymacji rozkładów wielowymiarowych za jej pomocą, pozwalają na wykorzystanie kopuli jako narzędzia do opisu zależności pomiędzy zjawiskami empirycznymi, które możemy zarejestrować. Rzeczywiście, motywacja taka jest słuszna w związku z twierdzeniem Sklara, które podaje, iż na produkcie kartezyjskim zbiorów wartości dystrybuant brzegowych zmiennych losowych, kopula opisująca zależności między tymi zmiennymi, jest wyznaczona jednoznacznie. Jedną z dziedzin, w której kopula obecnie jest najintensywniej wykorzystywana, jest matematyka finansowa. W ostatnim dziesięcioleciu można zauważyć znaczny wzrost zainteresowania pojęciem kopuli, zwłaszcza w kontekście modelowania procesów finansowych [Cherubini i in. 2012, Doman 2011, McNeil i in. 2005].

Wyobraźmy sobie zbiór aktywów finansowych (np. akcji)  $P = \{A_1, \dots, A_n\}$ , gdzie  $|A_i|$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , jest liczbą akcji spółki  $i$ , które posiadamy w momencie  $t$ . Jednym z kluczowych zagadnień, przed jakimi staje inwestor, jest takie dobranie liczby akcji poszczególnych spółek, by ryzyko straty było jak najmniejsze. Powstaje naturalne pytanie, jak oszacować to ryzyko i sprawdzić efektywność naszej oceny. W tym rozdziale podam definicję pojęcia ryzyka rynkowego, wprowadzę definicję miary koherentnej, a następnie przedstawię dwie miary ryzyka rynkowego – wartość zagrożoną (ang. *Value-at-Risk*) oraz oczekiwany niedobór (ang. *Expected-Shortfall*).

### 4.1. Pojęcie ryzyka

Według słownika języka polskiego, ryzyko to możliwość, że coś się nie uda. Zatem koncepcja ryzyka, z powodu możliwej szerokiej interpretacji, jest obiektem, który bardzo trudno badać w pełnej ogólności, wykorzystując definicję ujmującą wszystkie aspekty tego pojęcia. Z tego też powodu przyjęło się ograniczać próby definiowania i mierzenia ryzyka w zależności od danej dziedziny badania. Wyróżnia się cztery podstawowe typy ryzyka [Jajuga 2007]:

1. ryzyko kredytowe,
2. ryzyko operacyjne,
3. ryzyko płynności,
4. ryzyko rynkowe.

Ryzyko kredytowe (ang. *credit risk*) definiujemy jako zagrożenie wynikające z możliwości niedotrzymania warunków umowy przez drugą stronę. Ryzyko te możemy podzielić na ryzyko niedotrzymania warunków lub ryzyko wiarygodności kredytowej. Podział ten może także przebiegać ze względu na charakter drugiej strony kontraktu. W tym przypadku można mówić o ryzyku kredytobiorcy lub ryzyku kontrpartnera.



Kolejnym typem ryzyka finansowego jest ryzyko operacyjne (ang. *operational risk*). Definiuje się je jako ryzyko straty wynikającej z powodu nieprawidłowo działających ludzi, systemów i procesów wewnętrznych, a także ze zdarzeń zewnętrznych.

Trzecim wymienionym typem jest ryzyko płynności (ang. *liquidity risk*). Utożsamia się je z niespodziewanym spadkiem płynności podmiotu gospodarczego. Możemy tutaj wyróżnić ryzyko związane z problemem wypłacalności, czyli regulowania zobowiązań bieżących przez podmiot gospodarczy lub ryzyko braku zdolności do „upłynnienia” aktywów w określonym czasie i po określonej cenie.

W dalszej części pracy wykorzystywałem będę jednakże pojęcie ryzyka rynkowego (ang. *market risk*), które wynika ze zmian na rynkach finansowych i rynkach bezpośrednio z nim związanych. Dotyczy ono zmian cen aktywów będących w posiadaniu inwestora. Ryzyko to dodatkowo można podzielić ze względu na rynek, na którym działa inwestor. I tak wyróżniamy:

1. ryzyko cen akcji – związane ze zmianami cen instrumentów finansowych,
2. ryzyko stopy procentowej – związane ze zmianami stóp procentowych,
3. ryzyko cen towarów – związane ze zmianami cen na rynku towarowym,
4. ryzyko kursu walutowego – związane ze zmianami kursów walutowych.

Jest jasnym, iż wszystkie powyższe typy ryzyka nie są pojęciami niezależnymi, a wręcz przeciwnie – bezpośrednio są ze sobą powiązane. Podział przedstawiony powyżej ma na celu uproszczenie opisu zagadnienia, jakim jest mierzenie ryzyka. Z uwagi na to, że do badań empirycznych wykorzystane zostaną zwroty cen akcji, mówiąc o ryzyku, rozumiał je będę jako ryzyko rynkowe cen akcji.

## 4.2. Miary ryzyka

Problemy z definiowaniem ryzyka przenoszą się na stworzenie miary, które byłaby pomocna do oceny „wielkości” zagrożenia. Oznaczmy przez  $\mathcal{G}$  zbiór wszystkich możliwych wyników tworzących ryzyko, tj. wszystkich zmiennych losowych określonych na przestrzeni zdarzeń  $\Omega$  obejmujących zamknięcia notowań akcji spółki na giełdzie w dniu  $t$ .

**Definicja 4.1** (Artzner i in. 1999). Miarą ryzyka nazywamy funkcję postaci:

$$\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$$

Widzimy, że sama definicja 4.1 miary ryzyka nie jest w żaden sposób konstruktywna. Co więcej, rodzi ona szereg wątpliwości, zważywszy na „obszerność” zbioru  $\mathcal{G}$ . By uzyskać bardziej zawężoną rodzinę funkcji, powszechnie postuluje się, by miara ryzyka spełniała określone aksjomaty, które wydają się być heurystycznie sensowne. Mianowicie:

1. niezmienniczość ze względu na translację – dla każdego  $X \in \mathcal{G}$  oraz dla każdego  $\alpha \in \mathbb{R}$  zachodzi  $\rho(X + \alpha r) = \rho(X) - \alpha$ ,
2. subaddytywność – dla każdych  $X_1, X_2 \in \mathcal{G}$  mamy:  $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ ,
3. dodatnia jednorodność – dla każdego  $X \in \mathcal{G}$  oraz dla każdego  $\lambda \geq 0$  zachodzi  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ ,
4. monotoniczność – dla każdych  $X_1, X_2 \in \mathcal{G}$  takich, że  $X_1 \leq X_2$  zachodzi  $\rho(X_2) \leq \rho(X_1)$ ,
5. odpowiedniość – dla każdego  $X \in \mathcal{G}$  takiego, że  $X < 0$  zachodzi  $\rho(X) > 0$ .

Powyższe aksjomaty zapewniają, że miara spełniająca je będzie posiadała określone właściwości, które wydają się naturalnymi. Aksjomat niezmienniczości ze względu na translacje gwarantuje, że dołożenie do portfela określonej ilości gotówki zmniejsza związane z aktywami ryzyko o tę właśnie wielkość. Z aksjomatu tego wynika bezpośrednio równość  $\rho(X + \rho(X)) = 0$ , która pokazuje, że ma sens interpretacja  $\rho(X)$  jako minimalnej wysokości rezerw potrzebnych do zabezpieczenia pozycji. Założenie o monotoniczności miary pozwala nam utrzymywać porządek między danymi aktywami. Mianowicie, jeżeli jedne z nich przynoszą stale większy zysk, ryzyko z nimi związane jest mniejsze. Dodatnia jednorodność oznacza, iż zwielokrotnienie aktywów o dany skalar powoduje analogiczne zwielokrotnienie miary ryzyka. Aksjomat ten w rzeczywistości jest bardzo trudny do utrzymania, ze względu na brak nieskończonej płynności aktywów. Subaddytywność gwarantuje, że dywersyfikacja portfela inwestora nie zwiększa ryzyka. Aksjomat odpowiedniości oznacza, że miara ryzyka identyfikuje losowy portfel jako ryzykowny.

#### 4.2.1. Koherentna miara ryzyka

W literaturze mamy do czynienia z szeregiem idei zdefiniowania poprawnej miary ryzyka. Wydaje się, zwłaszcza w kontekście powszechności wykorzystania, iż jeden z pomysłów zyskał największą popularność. Jest to koherentna miara ryzyka zdefiniowana w 1999 roku przez Artznera, Delbaena, Ebera i Heatha.

**Definicja 4.2** (Artzner i in. 1999). Miara ryzyka spełniająca aksjomaty niezmienniczości ze względu na translację, subaddytywności, dodatniej jednorodności oraz monotoniczności nazywana jest koherentną miarą ryzyka.

Bepośrednio z powyższej definicji, a dokładniej z aksjomatów subaddytywności oraz dodatniej jednorodności, wynika wypukłość koherentnej miary ryzyka. Wypukłość miary gwarantuje bardzo istotną cechę – dywersyfikacja aktywów zapewnia redukcję ryzyka. Jest to bardzo istotna własność z perspektywy inwestora. Ponadto wypukłość gwarantuje, iż

minima lokalne odpowiadają minimum globalnym, która to cecha jest istotna w przypadku szukania takiego portfela inwestycyjnego, które gwarantuje ryzyka.

Mając zdefiniowaną miarę ryzyka oraz rodzinę funkcji, które zapewniają spełnienie odpowiednich własności, tj. spełniających definicję koherentnej miary ryzyka, możemy przejść do pokazania dwóch najczęściej wykorzystywanych miar zarówno w praktyce, jak i w teorii.

### 4.3. Wartość zagrożona

Wartość zagrożona jest to miara ryzyka, która na przestrzeni ostatnich lat zyskała największą popularność [Dowd 2002, McNeil i in. 2005]. Definicja tej miary jest bezpośrednio związana z kwantylem rozkładu prawdopodobieństwa.

**Definicja 4.3.** Kwantylem dolnym (odpowiednio górnym) rozkładu zmiennej losowej  $X$  rzędu  $\alpha$  nazywamy wartość

$$x_{(\alpha)} = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}$$

$$x^{(\alpha)} = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\}$$

Wartość zagrożona jest liczbą przeciwną do kwantyla górnego, tj.

**Definicja 4.4** (Acerbi, Tasche 2002). Wartością zagrożoną (w skrócie VaR) na poziomie ufności  $1 - \alpha$ , dla portfela  $X$  nazywamy liczbę

$$VaR_\alpha(X) = -x^{(\alpha)} = -\inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\}.$$

Inaczej, wartość zagrożona na poziomie tolerancji  $\alpha$  oznacza maksymalną wartość straty, która nie zostanie przekroczona z prawdopodobieństwem co najmniej  $1 - \alpha$ . W przypadku zmiennych losowych o ciągłych i rosnących dystrybuantach, definicja wartości zagrożonej się upraszcza

$$P(X \leq -VaR_\alpha(X)) = \alpha. \quad (4.1)$$

Powszechność stosowania wartości zagrożonej wynika z wielu użytecznych właściwości tej miary. Przede wszystkim, daje ona możliwość porównania ryzyka między różnymi portfelami inwestycyjnymi i za pomocą jednej liczby określa maksymalną wielkość straty z prawdopodobieństwem, np. 95 %. Z racji definicji opartej na kwantylu, nie jest związana z jednym typem rozkładu (np. normalnym). Miara ta jest także często wykorzystywana do oceny np. ryzyka płynności czy ryzyka operacyjnego. Trzeba tutaj także nadmienić, że zwłaszcza w przypadku zmiennych losowych o ciągłych i rosnących dystrybuantach, idea oraz interpretacja tej miary jest łatwo zrozumiała także dla osób niezajmujących się bezpośrednio problemem ryzyka inwestycyjnego. Co więcej, miara ta jest rekomendowana

przez jedną z najważniejszych instytucji regulujących zasady zarządzania ryzykiem, tj. Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego [Basel Committee on Banking Supervision 2006]. Wartość zagrożona spełnia 4 z 5 aksjomatów podanych w rozdziale 4.2.

**Twierdzenie 4.5** (Arztner i in. 1999). *Wartość zagrożona spełnia aksjomaty niezmienniczości ze względu na translację, dodatniej jednorodności, odpowiedniości oraz monotoniczności.*

Jednakże, miara ta nie spełnia aksjomatu subaddytywności. Wynika stąd, że wartość zagrożona nie jest koherentną miarą ryzyka. Pokazuje to następujący przykład:

**Przykład 4.6.** (Dowd 2002)

Założmy, iż posiadamy portfel składający się z dwóch instrumentów finansowych. Każdy z tych instrumentów wypłaca z prawdopodobieństwem 0,04 minus sto jednostek, a z prawdopodobieństwem 0,96 wypłaca 0 jednostek. Założmy także, iż zmienne losowe określające wartość wypłaty dla tych dwóch instrumentów są niezależne. Wartość zagrożona na poziomie ufności 95% dla każdego z tych instrumentów wynosi wówczas 0. Licząc wartość zagrożoną dla portfela składającego się z tych dwóch instrumentów, otrzymamy wartość  $-100$ . Zatem, miara ta nie spełnia aksjomatu subaddytywności.

#### 4.4. Oczekiwany niedobór

Problem niekoherentności wartości zagrożonej spowodował potrzebę poszukiwania nowej miary ryzyka, która posiadałaby jej zalety a zarazem spełniała warunek subaddytywności (ważny z perspektywy optymalizacji portfela inwestycyjnego). W 2002 roku Acerbi oraz Tasche stworzyli taką miarę, która bezpośrednio nawiązuje do wartości zagrożonej.

**Definicja 4.7** (Acerbi i Tasche 2002). Niech  $E[X^-] \leq \infty$ . Oczekiwany niedoborem (w skrócie ES) dla poziomu tolerancji  $\alpha$ , dla portfela  $X$  nazywamy liczbę

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \left( E[X \mathbf{1}_{\{X \leq x(\alpha)\}}] + x(\alpha) \left( \alpha - P(X \leq x(\alpha)) \right) \right).$$

Intuicyjnie, miara oczekiwanego niedoboru mówi o wartości oczekiwanej straty w  $\alpha$  najgorszych przypadkach dla portfela inwestora. Przy założeniu, iż zmienna losowa posiada ciągłą dystrybuantę, definicja ta upraszcza się do postaci

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} E[X \mathbf{1}_{\{X \leq x(\alpha)\}}]. \quad (4.2)$$

W przeciwieństwie do wartości zagrożonej, oczekiwany niedobór spełnia cztery aksjomaty miary koherentnej, tj.

**Twierdzenie 4.8** (Acerbi i Tasche 2002). *Niech  $E[X^-] \leq \infty$  dla każdego  $X \in \mathcal{G}$ . Wówczas  $ES_\alpha(X)$  jest koherentną miarą ryzyka.*

## 4.5. Porównanie wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru

Przedstawione powyżej dwie miary ryzyka posiadają wiele wspólnych cech. Jednakże z uwagi na fundamentalne rozbieżności warto podsumować obydwie miary:

- oczekiwany niedobór jest koherentną miarą ryzyka, zatem spełnia warunek subaddytywności, istotny ze względu na zagadnienie dywersyfikacji portfela,
- wartość zagrożona nie jest wypukłą miarą ryzyka, co ogranicza zastosowanie tej miary w teorii portfela inwestycyjnego, w przeciwieństwie do oczekiwanego niedoboru,
- oczekiwany niedobór, w przypadku występowania zjawiska grubych ogonów rozkładu, uwzględnia informacje z tym zjawiskiem związane, w przeciwieństwie do wartości zagrożonej,
- estymatory empiryczne obydwu miar mają bardzo dobre własności statystyczne,
- obie miary nie wymagają wykorzystania określonego rozkładu,
- koncepcja obydwu miar jest intuicyjnie zrozumiała dla szerokiego grona odbiorców.

## 5. Badania empiryczne

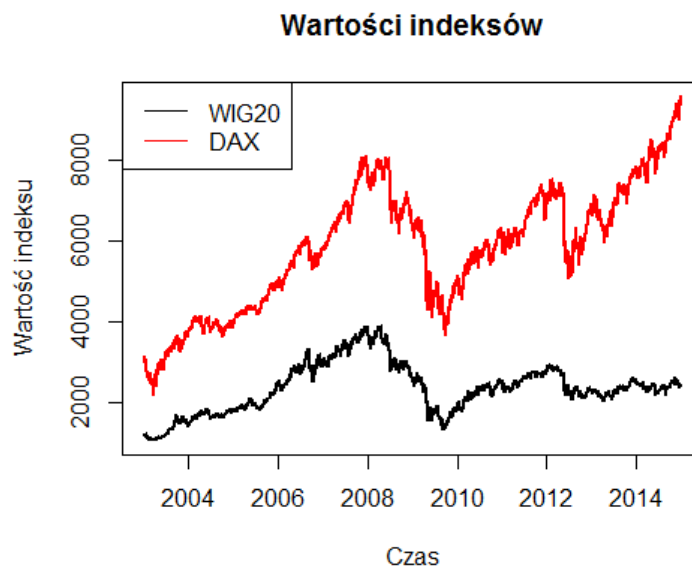
Poniższy rozdział poświęcony jest badaniom empirycznym, przeprowadzonym na bazie wnioskowań teoretycznych zaprezentowanych w rozdziałach poprzednich. Wykorzystuję tutaj szeregi poziomów zamknięć dwóch indeksów giełdowych – WIG20 oraz DAX. W pierwszej kolejności dokonuję filtracji szeregów, następnie dopasowuję model kopuli szszeltatycznej oraz dynamicznej. Mając wybrany „najlepszy” model kopuli dynamicznej, przechodzę do szacowania wartości zagrożonej oraz oczekiwanego niedoboru. Wszystkie modele estymowane były za pomocą programu MATLAB, natomiast rysunki wykonane zostały za pomocą środowiska statystycznego R.

### 5.1. Przedstawienie danych

Rynki Polski oraz Niemiec, z racji samego położenia geograficznego, są ze sobą mocno połączone. Polska jest najważniejszym partnerem handlowym Niemiec wśród państw Europy Środkowo-Wschodniej. Niemcy są największym odbiorcą produkcji Polski – odbierają oni 31,2 % całości polskiego eksportu. Z drugiej strony, udział Niemiec w imporcie do Polski wynosi 27,3 % [GUS 2014]. Z uwagi na okres czasowy, ostatnie 25 lat wiązały się ze zmianą ustrojową w Polsce jak i wschodniej części Niemiec, można przypuszczać, że związek gospodarek Polski i Niemiec ulegał znaczącym zmianom wraz z przemianami gospodarczymi dokonującymi się w tych krajach.

Powyższe fakty motywują analizę zależności pomiędzy gospodarkami tych dwóch krajów, gdzie miernikiem zmian zachodzących w danej gospodarce są zmiany poziomów indeksu giełdowego składającego się z czołowych przedsiębiorstw danego kraju notowanych na giełdzie. Pierwszy indeks WIG20 (Warszawski Indeks Giełdowy) składa się z dwudziestu największych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Drugi indeks to DAX (niem. *Deutscher Aktienindex*) składający się z 30 największych spółek akcyjnych Frankfurckiej Giełdy Papierów Wartościowych.

Obserwacje pochodzą z okresu od 2 stycznia 2003 roku do 1 stycznia 2015 roku. W okresie tym wspólnych dni, w których pojawiały się notowania obu indeksów, było 3030 co wydaje się dużą próbą, pozwalającą uzyskać wiarygodne wnioski. Rysunek 5.1 ilustruje poziom indeksów w badanym okresie:

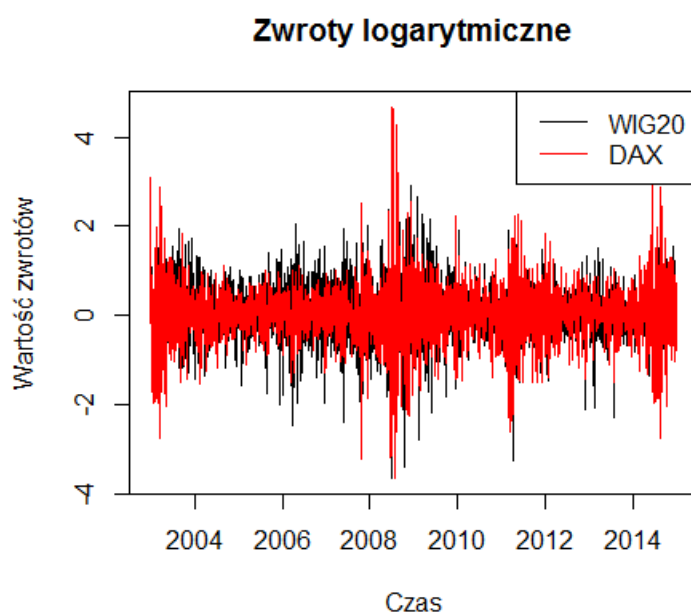


**Rysunek 5.1.** Poziom indeksów WIG20 oraz DAX w latach 2003-2015.

Danymi, na których zostaną wykonane estymacje, są procentowe zwroty logarytmiczne cen zamknięcia indeksu w danym dniu, tj.

$$r_t = 100 \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right).$$

Tak określone zwroty są powszechnie stosowane w badaniach naukowych dotyczących finansowych szeregów czasowych. Rysunek 5.2 prezentuje wartości zwrotów logarytmicznych w badanym okresie



**Rysunek 5.2.** Logarytmiczne stopy zwrotów dla indeksów WIG20 oraz DAX.

### 5.1.1. Analiza wstępna

Analizując kształtowanie się wartości indeksów w przeciągu ostatnich 12 lat, można zauważyć stały trend wzrostowy ich wartości w latach 2003-2007. Jest to wynik koniunktury gospodarczej, która miała miejsce w Polsce oraz większości krajów na świecie po roku 2001 – kiedy wystąpił tzw. kryzys dot-com w USA. Warto zauważyć nagły skok indeksu DAX w okresie maj-lipiec w 2007 roku – jest to efekt boomu i zapowiedź przyszłej dekonunktury w całej gospodarce, co miało oczywiście wymierny wpływ na ceny akcji, także na giełdzie warszawskiej. Kryzys finansowy w roku 2007 wyraźnie odbija się na poziomie badanych indeksów. Od sierpnia roku 2007 do początku roku 2009 mamy do czynienia ze stopniowym spadkiem wartości obu indeksów. W okresie od połowy roku 2012 do stycznia roku 2015 w przypadku indeksu DAX zauważalny jest stały wzrost, natomiast poziom indeksu WIG20 waha się w okolicy wartości 2500.

### 5.1.2. Główne charakterystyki szeregów

Tabela 5.1 przedstawia podstawowe charakterystyki szeregów procentowych zwrotów logarytmicznych indeksów.

**Tabela 5.1.** Podstawowe statystyki szeregów procentowych zwrotów logarytmicznych.

Podstawowe statystyki szeregów	WIG20	DAX
Średnia	0,010	0,019
Odchylenie standardowe	0,651	0,621
Skośność	-0,254	0,001
Kurtoza	6,014	9,049
Korelacja liniowa	0,578	

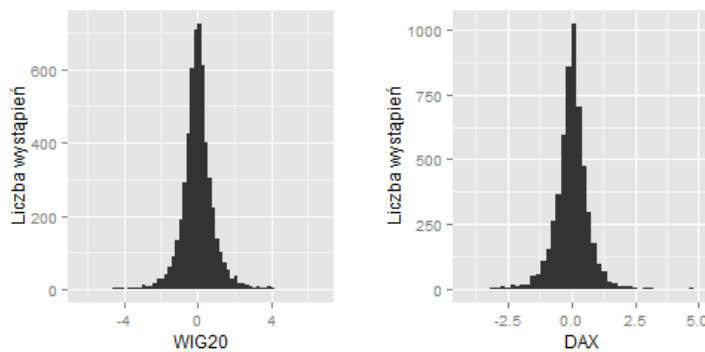
Wartości zwrotów są skupione wokół zera. Odchylenie standardowe dla obu indeksów jest podobne. W przypadku indeksu WIG20 mamy do czynienia ze skośnością lewostronną rozkładu, rozkład logarytmicznych zwrotów indeksu DAX jest symetryczny. W przypadku obu rozkładów mamy do czynienia z występowaniem zjawiska leptokurtozy, tj. grubych ogonów.

## 5.2. Filtracja VARMA-GARCH

### 5.2.1. Histogramy rozkładów

Estymacja zostanie wykonana metodą funkcji wnioskowania dla rozkładów brzegowych. Podstawowym problemem w trakcie doboru modelu „najlepiej” opisującego szereg jest wybór odpowiedniego rozkładu innowacji. Wstępne charakterystyki szeregów oraz histogramy jasno pokazują, iż w przypadku rozkładu bezwarunkowego nie możemy założyć normalności rozkładów szeregów logarytmicznych zwrotów.





**Rysunek 5.3.** Histogramy rozkładów logarytmicznych zwrotów.

Analiza histogramów wskazuje na występowanie znacznej ilości zwrotów o bezwzględnej wartości większej od dwóch odchyłek standardowych. Dlatego też, w celu jak najlepszego dopasowania, wykorzystałem poza rozkładem normalnym, standaryzowany rozkład  $t$  Studenta [Bollerslev 1987] oraz standaryzowany rozkład skośny  $t$  Studenta [Hansen 1994]. Standaryzowany rozkład  $t$  Studenta jest rozkładem symetrycznym o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji, którego funkcja gęstości ma postać

$$g(x; \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu-2}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

gdzie  $\Gamma$  jest standardową funkcją gamma a  $\nu > 2$ . Gęstość zmiennej losowej  $X$  pochodzącej ze standaryzowanego skośnego rozkładu  $t$  Studenta wyraża się wzorem

$$h(x; \nu, \lambda) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bx+a}{1-\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2}, & \text{dla } x < -a/b, \\ bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bx+a}{1+\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2}, & \text{dla } x \geq -a/b, \end{cases}$$

gdzie  $2 < \nu < \infty$ ,  $-1 < \lambda < 1$ . Stałe  $a$ ,  $b$  i  $c$  mają następujące postaci

$$\begin{aligned} a &= 4\lambda c \left(\frac{\nu-2}{\nu-1}\right), \\ b^2 &= 1 + 3\lambda^2 - a^2, \\ c &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Rozkład ten ma wartość oczekiwaną równą 0 i jednostkową wariancję. W przypadku gdy  $\lambda = 0$ , uzyskujemy gęstość zmiennej losowej mającej standaryzowany rozkład  $t$  Studenta. Standaryzowany skośny rozkład  $t$  Studenta pozwala na uwzględnienie skośności. Jest to często występująca charakterystyka szeregu procentowych zwrotów logarytmicznych.

### 5.2.2. Wybór optymalnego modelu

Mając wybrane możliwe rozkłady innowacji szeregów, możemy przejść do próby estymacji modeli opisanych w rozdziale drugim. Wstępne oszacowania modeli rodziny VARMA przedstawionych w podrozdziale 2.1 wskazywały na brak jakichkolwiek zależności liniowych pomiędzy opóźnionymi zwrotami jednego szeregu, a zwrotem szeregu drugiego. Dlatego też filtrację wykonałem w sposób jednowymiarowy dla obu szeregów. W przypadku modelowania wariancji warunkowej przyjąłem model GJR-GARCH(1,1). W modelu tym logarytmiczne zwroty  $r_t$  opisane są następującym układem równań [Glosten i in. 1993]:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + y_t, \\ \mu_t &= E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) \\ y_t &= \sigma_t \epsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \gamma y_{t-1}^2 I(y_{t-1} < 0) + \beta \sigma_{t-1}^2, \end{aligned}$$

gdzie  $\mu_t$  jest warunkową średnią,  $\sigma_t^2$  warunkową wariancją, a  $\epsilon_t$  ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym standaryzowanym rozkładzie. Model ten uwzględnia potwierdzany empirycznie fakt, iż szoki  $y_{t-1}$  mają asymetryczny wpływ na zmienność w czasie  $t$ . Takie zjawisko określa się jako efekt dźwigni. Kierując się kryteriami informacyjnymi opisanymi w podrozdziale 3.4.3, wybrałem modele ARMA(0,0)-GJR-GARCH(1,1) oraz ARMA(1,0)-GJR-GARCH(1,1) odpowiednio dla szeregu zwrotów logarytmicznych indeksu WIG20 oraz DAX. Tabela 5.2 przedstawia wartości kryterium informacyjnego BIC dla powyższych modeli z trzema rozkładami innowacji.

**Tabela 5.2.** Wartości kryterium informacyjnego BIC dla różnych rozkładów innowacji.

Rozkład	BIC	
	WIG20	DAX
normalny	5326,9345	4578,4524
standaryzowany $t$ Studenta	<b>5277,2667</b>	4520,8090
standaryzowany skośny $t$ Studenta	5284,4011	<b>4499,4566</b>

W przypadku szeregu zwrotów logarytmicznych indeksu WIG20, najniższa wartość kryterium osiągnięta jest ze standaryzowanym rozkładem  $t$  Studenta. Dla procentowych zwrotów logarytmicznych indeksu DAX wartość najniższa kryterium BIC została osiągnięta w modelu ze standaryzowanym skośnym rozkładem  $t$  Studenta. Tabela 5.3 przedstawia wyniki estymacji modeli dla dwóch szeregów.

**Tabela 5.3.** Oszacowania parametrów dla jednowymiarowych modeli z rodziny ARMA-GARCH.

Parametry modelu	WIG20	DAX
$\mu$	0,0161 (0,009)	0,0201 (0,008)
$\phi_1$	–	-0,0260 (0,018)
$\omega$	0,0036 (0,001)	0,0040 (0,001)
$\alpha$	0,0358 (0,008)	0,0000 (0,007)
$\beta$	0,9362 (0,009)	0,9137 (0,012)
$\gamma$	0,0367 (0,014)	0,1472 (0,022)
$\nu$	9,0488 (1,345)	9,3599 (1,588)
$\lambda$	–	-0,1316 (0,022)

W nawiasach podano błędy standardowe oszacowań parametrów modeli. Możemy obecnie przejść do analizy wystandaryzowanych reszt postaci

$$\hat{\epsilon}_t = \frac{r_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t}.$$

### 5.2.3. Testowanie dopasowania dla reszt

Wykorzystując parametryzację z podrozdziału poprzedniego, uzyskane standaryzowane reszty  $\hat{\epsilon}_t$  możemy przetransformować za pomocą dystrybuanty standaryzowanego skośnego rozkładu  $t$  Studenta, dystrybuanty standaryzowanego rozkładu  $t$  Studenta lub dystrybuanty empirycznej. Uzyskujemy wtedy szeregi pseudoobserwacji odpowiednio  $\hat{U}_{(t)}^P \equiv F_{StS}(\hat{\epsilon}_t, \hat{\nu}, \hat{\lambda})$ ,  $\hat{U}_{(t)}^P \equiv F_{tS}(\hat{\epsilon}_t, \hat{\nu})$  oraz  $\hat{U}_{(t)}^S \equiv \hat{F}_T(\hat{\epsilon}_t)$ . Możemy sprawdzić jakość dopasowania, wykorzystując analogiczne statystyki, jak opisane w podrozdziale 3.4.2 dla przypadku jednowymiarowego

$$KS = \max_t \left| \hat{U}_{(t)} - \frac{t}{T} \right|,$$

$$CvM = \sum_{t=1}^T \left( \hat{U}_{(t)} - \frac{t}{T} \right)^2,$$

gdzie  $\hat{U}_{(t)}$  jest  $t$ -tą obserwacją w uporządkowanym szeregu pseudoobserwacji, po odpowiedniej transformacji. Tabela 5.4 przedstawia wyniki testu otrzymane metodą bootstrapową opisaną w podrozdziale 3.4.2.

**Tabela 5.4.** Prawdopodobieństwa testowe ( $p$ -wartości) dla bootstrapowego testu dobroci dopasowania dla rozkładu  $t$  Studenta i standaryzowanego rozkładu skośnego  $t$  Studenta.

Statystyka	WIG20	DAX
KS	0,72	0,00
CvM	0,69	0,00

W przypadku szeregu pierwszego, wyniki testu zdają się potwierdzać bardzo dobre dopasowanie modelu wraz ze standaryzowanym rozkładem  $t$  Studenta jako rozkładem innowacji.

W drugim przypadku, mamy podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej o prawidłowym opisanu rozkładów brzegowych na poziomie istotności 0,05. Wynika z tego, iż pomimo że standaryzowany skośny rozkład  $t$  Studenta minimalizował wartość kryterium informacyjnego spośród analizowanych rozkładów, to wydaje się, że nie jest to rzeczywisty rozkład innowacji opisujących proces zwrotów indeksu DAX. Warto tutaj także podkreślić, iż z uwagi na bardzo duże wymagania obliczeniowe, wielkości prób bootstrapowych nie były duże, co mogło mieć wpływ na wyniki testu.

### 5.3. Wyniki dla kopuli statycznych

Po wykonanej filtracji oraz transformacji otrzymałem po dwa szeregi pseudoobserwacji dla metody parametrycznej oraz metody semiparametrycznej. Szeregi te pozwalają na estymację modeli wykorzystujących kopulę i wybranie takiej, która najlepiej przybliży zaobserwowane dane. Tabela 5.5 przedstawia wartości kryterium informacyjnego BIC dla różnych rodzin kopuli opisanych w podrozdziale 1.4.

**Tabela 5.5.** Wartości kryterium informacyjnego BIC dla różnych rodzin kopuli.

Kopula	Metoda estymacji	
	Parametryczna	Semiparametryczna
Normalna	-1052,0	-1066,2
Studenta	<b>-1519,3</b>	<b>-1118,0</b>
Gumbela	-1253,5	-980,1
Claytona	-868,3	-901,4
Franka	-1049,0	-1026,9

Widzimy, że zarówno w przypadku parametrycznym, jak i semiparametrycznym, najmniejszą wartość kryterium informacyjnego uzyskano dla kopuli Studenta. Tabela 5.6 przedstawia oszacowane parametry dla tej kopuli

**Tabela 5.6.** Wartości współczynnika korelacji oraz liczba stopni swobody dla kopuli Studenta przy dwóch metodach estymacji.

Parametry	Parametryczna	Semiparametryczna
$\rho$	0,5786 (0,0173)	0,5542 (0,0128)
$\nu^{-1}$	0,12 (0,022)	0,1253 (0,0188)

W nawiasach podane zostały błędy standardowe oszacowań parametrów.

### 5.4. Wyniki dla kopuli dynamicznej

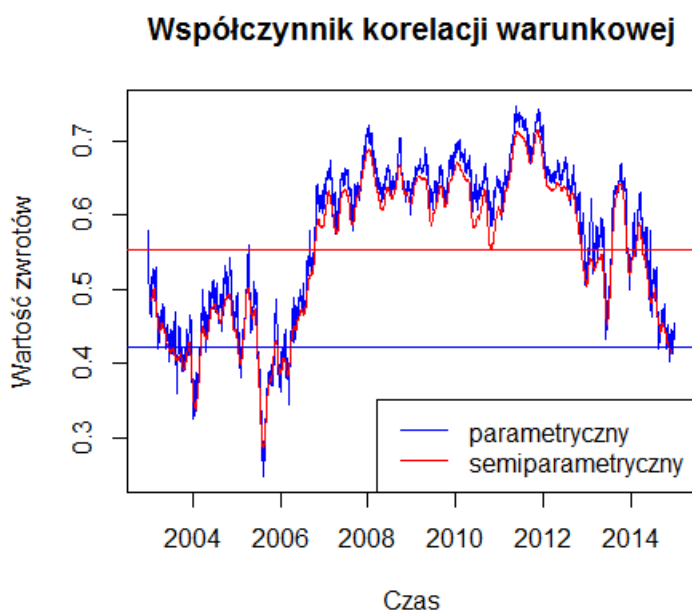
Oszacowania parametrów modelu z podrozdziału 5.3 pozwalają na przejście do estymacji modelu, w którym odrzucamy założenie o stałym charakterze zależności między analizowanymi indeksami. Oszacowania te są punktem startowym dla estymacji modelu dynamicznego. Modelem, który wykorzystujemy na tym etapie, jest model Copula-GAS(1, 1) z

kopulą Studenta, opisany w podrozdziale 2.5. Tabela 5.7 przedstawia wartości oszacowań parametrów. W nawiasach podane zostały błędy standardowe.

**Tabela 5.7.** Wyniki estymacji modelu Copula-GAS(1, 1) dla metody parametrycznej i semiparametrycznej.

Parametry	Parametryczna	Semiparametryczna
$\omega$	0,0039 (0,0004)	0,0050 (0,0001)
$\alpha$	0,0265 (0,0013)	0,0256 (0,0014)
$\beta$	0,9969 (0,0000)	0,9960 (0,0000)
$\nu^{-1}$	0,0878 (0,0008)	0,0932 (0,0016)

Rysunek 5.4 przedstawia oszacowane wartości współczynnika korelacji liniowej w badanym okresie dla dwóch metod estymacji.



**Rysunek 5.4.** Wartości warunkowego współczynnika korelacji z dopasowanego modelu GAS(1,1) z kopulą Studenta oraz oszacowania współczynnika korelacji dla modelu stałego.

Analizując wykres, widzimy, że w okresie od 2003 do roku 2007, w przypadku modelu parametrycznego, zależność między indeksami stale spada, by w ciągu jednego roku wzrosnąć do poziomu około 0,57. Od początku roku 2012 mamy do czynienia ponownie ze spadkiem oszacowanego współczynnika. Na przykładzie tym widać wyraźnie, jak odejście od założenia statyczności struktury zależności diametralnie może wpłynąć na ocenę powiązań między danymi indeksami i zmienić ocenę ekonomiczną charakteru zależności między gospodarkami, gdy przyjmujemy wartość indeksów jako wskaźnik stanu gospodarki.

### 5.4.1. Test jakości dopasowania kopuli dynamicznej

Mając wybrany model opisujący dwuwymiarowy rozkład łączny zwrotów logarytmicznych indeksów WIG20 oraz DAX, tj. Copula-GAS(1,1) z kopulą Studenta, możemy przejść do testowania jakości dopasowania modelu dla przypadku w pełni parametrycznego. Wykorzystujemy tutaj procedurę bootstrapową opisaną w podrozdziale 3.4.2. Dla próby o wielkości 100 wygenerowanych próbek,  $p$ -wartość dla testu ze statystyką  $KS$  wyniosła 0,64. Dla testu ze statystyką  $CvM$ ,  $p$ -wartość wyniosła 0,79. W obu przypadkach nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej na poziomie istotności 0,05. Wyniki testów zdają się wskazywać, iż rzeczywisty rozkład procesu może być generowany przez kopulę Studenta. Także i w tym przypadku warto podkreślić, iż z uwagi na bardzo duże wymagania obliczeniowe wielkość próby bootstrapowej mogła nie być wystarczająca.

## 5.5. Szacowanie wartości zagrożonej i oczekiwanego niedoboru w próbie

Szacowanie wartości zagrożonej, a także oczekiwanego niedoboru, w przypadku odejścia od założenia normalności rozkładów zwrotów logarytmicznych, nie jest możliwe za pomocą jawnych wzorów analitycznych. W takim przypadku najczęściej wykorzystywaną metodą są procedury sumulacyjne, często skrótowo określane jako symulacje Monte Carlo [McNeil in. 2005]

### 5.5.1. Szacowanie metodą Monte Carlo

Podstawą omawianej metody jest wybór oraz estymacja odpowiedniego modelu, prawidłowo opisującego analizowane zjawisko, przy wykorzystaniu odpowiednio dużej próby  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_T$ . Dla każdego punktu w czasie z próby generujemy  $N$  (gdzie  $N$  jest odpowiednio dużą liczbą i w zależności od stopnia złożoności obliczeniowej symulacji wynosi ona przeważnie 100000 – 1000000) niezależnych obserwacji, wykorzystując kopulę z wybranego modelu. Następnie tworzymy zwroty z portfela, biorąc odpowiednie wagi dla poszczególnych elementów portfela. Korzystając z wygenerowanych symulacji, obliczamy miary ryzyka (4.1) i (4.2) dla odpowiedniego poziomu tolerancji. W przypadku wartości zagrożonej, jako estymator przyjmujemy kwantyl empiryczny, uwzględniając wielkość  $N$  oraz twierdzenie 3.4. W przypadku oczekiwanego niedoboru, estymator ma postać średniej ze zwrotów z portfela, które przekroczyły poziom wartości zagrożonej, tj.

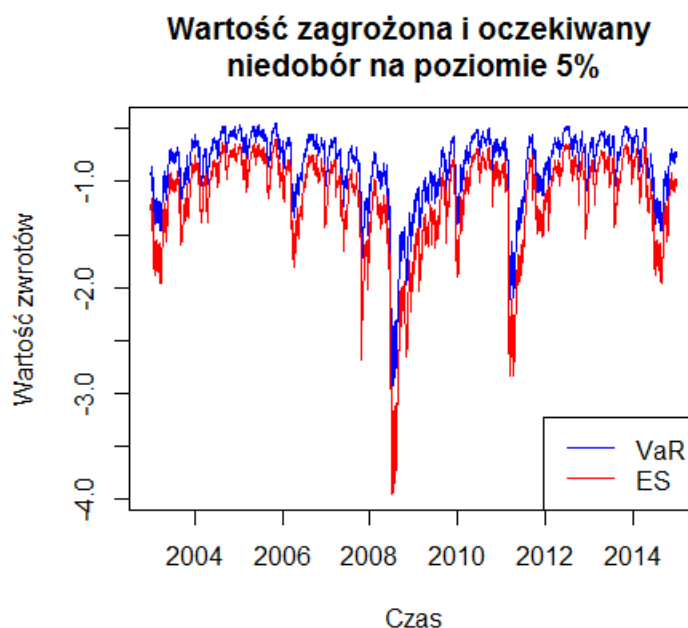
$$\widehat{VaR}_\alpha^t = (\widehat{F}_N^t)^{-1}(\alpha),$$

$$\widehat{ES}_\alpha^t = \frac{1}{|J|} \sum_{j \in J} r_j$$

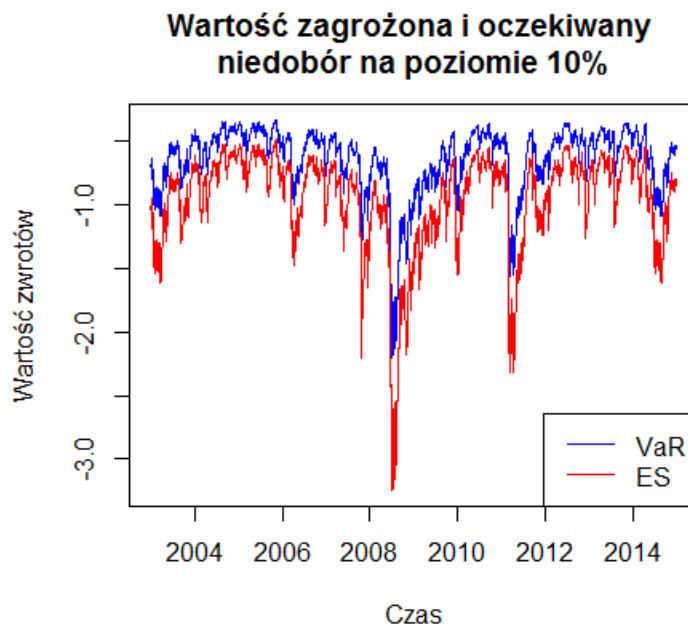
gdzie  $t$  to dany moment w próbie,  $\alpha \in (0, 1)$  a  $J = \{j : r_j \leq \widehat{VaR}_\alpha^t\}$ . Warto tutaj zaznaczyć, iż metoda ta przenosi wszystkie niedopasowania związane z błędnym dobraniem modelu opisującego proces. W takim przypadku niezależnie od wielkości symulacji, końcowe poziomy mogą być bardzo mocno niedoszacowane bądź przeszacowane. W przypadku zagadnień wielowymiarowych cały czas problemem może być także złożoność obliczeniowa.

### 5.5.2. Wyniki szacowania

Na potrzeby oszacowania wartości zagrożonej stworzyłem przykładowy portfel składający się z logarytmicznych zwrotów indeksów DAX oraz WIG20, gdzie udział obu indeksów jest równy. Poziomy tolerancji, dla których szacowałem wartość zagrożoną oraz oczekiwany niedobór, to 5% oraz 10%. Jako model, z którego generowałem dane, przyjąłem Copula-GAS(1,1) z kopulą Studenta, wykorzystując parametry wyestymowane w podrozdziale w 5.4. Rysunki 5.5 oraz 5.6 przedstawiają oszacowaną wartość zagrożoną oraz oczekiwany niedobór w analizowanym okresie, dla poziomów tolerancji odpowiednio 5% i 10%.



**Rysunek 5.5.** Oszacowania VaR oraz ES dla poziomu tolerancji 5%.



**Rysunek 5.6.** Oszacowania VaR oraz ES dla poziomu tolerancji 10%.

Analizując powyższe dwa wykresy, widzimy wyraźnie, jak kryzys finansowy w roku 2008 znacząco zwiększył poziom wartości zagrożonej oraz oczekiwanego niedoboru. Podobnie sytuacja wygląda w okresie sierpień-wrzesień w roku 2011, kiedy to pojawiły się informacje na temat możliwej niewypłacalności Hiszpanii oraz Włoch.

Jednym z mierników jakości oszacowania jest liczba przekroczeń poziomów VaR przez historyczne wartości zwrotów z portfela. Możemy dzięki temu ocenić, jak blisko zakładanego poziomu tolerancji była realna liczba przekroczeń w kontekście zwrotów historycznych.

**Tabela 5.8.** VaR dla poziomów tolerancji 5% i 10%.

Poziom tolerancji	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Długość szeregu
5%	161	0,0531	3030
10%	292	0,0964	3030

Częstość przekroczeń z tabeli 5.8 pokazuje, że dla 10% poziomu tolerancji mamy do czynienia z niedoszacowaniem wartości zagrożonej. W pewnych sytuacjach taki stan rzeczy może spowodować utratę płynności, co jest zjawiskiem niepożądanym w kontekście zarządzania ryzykiem rynkowym. Dla 5% poziomu tolerancji wystąpiło przeszacowanie wartości zagrożonej, co może prowadzić do niezbyt oszczędnego oszacowania ryzyka portfela.



## Zakończenie

Analiza rozkładów wielowymiarowych zarówno z probabilistycznego, jak statystycznego punktu widzenia, w przypadku odejścia od rozkładu normalnego jest zagadnieniem problematycznym i wydaje się być działem dopiero rozwijającym się. Kopule pozwalają na wykorzystanie heurystycznego podejścia do problemu zjawisk wielowymiarowych, w którym najpierw badamy rozkłady brzegowe, a następnie szukamy kopuli, która opisuje zależność pomiędzy zmiennymi. Ponadto, twierdzenie Sklara przedstawione w rozdziale pierwszym, uzasadnia wykorzystanie kopuli w badaniach empirycznych.

Jednym z możliwych zastosowań jest analiza wielowymiarowych szeregów finansowych. W rozdziale drugim przedstawiłem podstawowe wielowymiarowe modele ekonometryczne umożliwiające opis stacjonarnych szeregów czasowych, w tym szeregów finansowych. Do końca lat dziewięćdziesiątych powszechnie zakładało się, iż rozkład innowacji pochodzi z rodziny rozkładów eliptycznych. Kopule pozwalają usunąć to często niezgodne z rzeczywistością założenie i umożliwiają dopasowanie rozkładów brzegowych oddzielnie od rozkładu łącznego. Przykładami modeli wykorzystujących kopule w kontekście modelowania procesów finansowych są modele Copula-GAS czy model SCAR.

W rozdziale trzecim przedstawiłem asymptotyczne własności estymatorów dla trzech podstawowych rodzajów estymacji, wykorzystujących podejście częstotliwościowe, w przypadku kopuli statycznej. Trzeba tutaj podkreślić jednakże, iż teoria estymacji w przypadku modeli dynamicznych, w których zakładamy, iż struktura zależności pomiędzy zmiennymi podlega zmianie w czasie, na dzień dzisiejszy nie podaje żadnych asymptotycznych własności estymatorów w takich modelach.

Jednym z możliwych zastosowań, wykorzystujących kopule poprzez modelowanie wielowymiarowego szeregu finansowego, jest szacowanie wartości zagrożonej – podstawowej miary ryzyka w kontekście zarządzania ryzykiem portfela oraz koherentnej miary ryzyka – oczekiwanego niedoboru.

W rozdziale piątym, wykorzystując dwa szeregi notowań indeksów WIG20 oraz DAX i stosując metodę funkcji wnioskowania dla rozkładów, próbowałem dopasować model Copula-GAS(1,1). Wyniki testów dopasowania zdają się potwierdzać hipotezę, iż kopula Studenta dobrze oddaje strukturę zależności pomiędzy analizowanymi indeksami. Kształtowanie się współczynnika korelacji wyraźnie pokazuje, jak zależność liniowa może ewoluować w czasie. Wyniki estymacji pokazały także, iż rozkłady brzegowe nie muszą należeć do tej samej rodziny rozkładów co rozkład łączny analizowanego zjawiska. Wykorzystanie kopuli pozwoliło na uzyskanie dobrze dopasowanych oszacowań miar ryzyka, takich jak wartość zagrożona lub oczekiwany niedobór dla przykładowego portfela. W empirycznym przykładzie, zakładane poziomy tolerancji były relatywnie dobrze zachowane.

## Literatura

- Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). *On the Coherence of Expected Shortfall*. *Journal of Banking and Finance* 26, 1487-1503.
- Anderson, T. W., & Darling, D. (1954). *A Test of Goodness of Fit*. *Journal of the American Statistical Association* 49, 765-769.
- Arztner, P., Delbean, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). *Coherent Measures of Risk*. *Mathematical Finance* 9, 203-228.
- Basel Committee on Banking Supervision (2006). *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*. Bank for International Settlements.
- Bauwens, L., Laurent, S., & Rombouts, J. V. K. (2006). *Multivariate GARCH Models: A Survey*. *Journal of Applied Econometrics* 21, 79-109.
- Berg, D. (2009). *Copula Goodness-of-fit Testing: an Overview and Power Comparison*. *European Journal of Finance* 15 (7-8), 721-750.
- Bodnar, T., & Hatusch, N. (2012). *Copula-Based Dynamic Conditional Correlation Multiplicative Error Processes*. SFB649 Discussion Paper 2012-044, Humboldt Universität zu Berlin.
- Bollerslev, T. (1987). *A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return*. *The Review of Economics and Statistics*, 69 (3), 542-547.
- Burnham, K. P., & Anderson, D. R. (2002). *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*. Springer, New York.
- Chen, X., & Fan, Y. (2006). *Estimation of Copula Based Semiparametric Time Series Models*. *Journal of Econometrics* 130, 307-335.
- Cherubini, U., Gobbi, F., Mulinacci, S., & Roagnoli, S. (2012). *Dynamic Copula Methods in Finance*. Wiley, Chichester.
- Cherubini, U., Luciano, E., & Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*. Wiley, Chichester.
- Cox, D. R. (1981). *Statistical Analysis of Time Series: Some Recent Developments*. *Scandinavian Journal of Statistics* 8, 93-115.
- Creal, D., Koopman, S. J., & Lucas, A. (2013). *Generalized Autoregressive Score Models with Applications*. *Journal of Applied Econometrics* 28, 777-795.

- Dobrić, J., & Schmid, F. (2007). *A Goodness of Fit Test for Copulas Based on Rosenblatt's Transformation*. *Computational Statistics and Data Analysis* 51, 4633-4642.
- Doman, M., & Doman, R. (2009). *Modelowanie zmienności ryzyka. Metody ekonometrii finansowej*. Wolters Kluwer, Kraków.
- Doman, R. (2010). *Modelling the Dependencies Between Returns on the Warsaw Stock Indices Using Time Varying Copulas*, w: W. Milo, P. Wdowiński, P. Szafrński (ed.), *Financial Markets: Principles of Modelling, Forecasting and Decision-Making*. FindE-con Monograph Series: Advances in Financial Market Analysis, No. 8, Łódź University Press, Łódź, 83-97.
- Doman, R. (2011). *Zastosowania kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Dowd, K. (2002). *Measuring Market Risk*. Wiley, Chichester.
- Embrechts, P., McNeil, A., & Straumann, D. (2002). *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*. w: M. Dempster (ed.), *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge University Press, Cambridge, 176-223.
- Engle, R. (2002). *Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models*. *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 339-350.
- Engle, R. F., & Kroner, K. F. (1995). *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH*. *Econometric Theory*, 11, s. 122-150.
- Erb, C. B., Harvey, C. R., & Viskante, T. E. (1994). *Forecasting International Equity Correlations*. *Financial Analysts Journal* 50 (6), 32-45.
- Fermanian, J. D. (2013). *An Overview of the Goodness-of-Fit Test Problem for Copulas*. w: P. Jaworski, F. Durant and W. Härdle (eds.), *Copulae in Mathematical and Quantitative Finance*, 61-89.
- Genest, C., Ghoudi, K., & Rivest, L. P. (1995). *A Semiparametric Estimation Procedure of Dependence Parameters in Multivariate Families of Distributions*. *Biometrika* 82, 3, 543-552.
- Genest, C., Remillard, B., & Beaudoin, D. (2009). *Goodness-of-fit Tests for Copulas: A Review and a Power Study*. *Insurance: Mathematics and Economics* 44 (2), 199-213.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*. *The Journal of Finance*, 8 (5), 1779-1801.

- GUS (2014). *Rocznik statystyczny handlu zagranicznego 2014*. Zakład Wydawnictw Statystycznych, Warszawa.
- Hafner, C. M., & Manner, H. (2010). *Dynamic Stochastic Copula Models: Estimation, Inference and Applications*. *Journal of Applied Econometrics* 27, 269–295.
- Hafner, C. M., & Reznikova, O. (2010). *Efficient Estimation of a Semiparametric Dynamic Copula Model*. *Computational Statistics and Data Analysis* 54, 2609–2627.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton.
- Hansen, B. E. (1994). *Autoregressive Conditional Density Estimation*. *International Economic Review*, 35 (3), 705–730.
- Jajuga, K. (red.) (2007). *Zarządzanie ryzykiem*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman and Hall/CRC, New York.
- Kendall, M. (1938). *A New Measure of Rank Correlation*. *Biometrika* 30, 81–89.
- Krzyśko, M. (1996). *Statystyka matematyczna*. Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań.
- Krzyśko, M. (2009). *Podstawy wielowymiarowego wnioskowania statystycznego*. Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, Poznań.
- Lee, T. H., & Long, X. (2009). *Copula-Based Multivariate GARCH Model with Uncorrelated Dependent Errors*. *Journal of Econometrics*, 150, 207–218.
- Longin, F., & Solnik, B. (1995). *Is the Correlation in International Equity Returns Constant: 1960–1990*. *Journal of International Money and Finance* 14, 3–26.
- McNeil, A., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press, Princeton.
- Min, A., & Czado, C. (2010). *Bayesian Inference for Multivariate Copulas Using Pair-Copula Constructions*. *Journal of Financial Econometrics* 8, 511–546.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- Patton, A. (2002). *Applications of Copula Theory in Financial Econometrics, (rozprawa doktorska)*. University of California, San Diego.
- Patton, A. (2006). *Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence*. *International Economic Review* 47, 527–556.

- Patton, A. (2012). *Copula Methods for Forecasting Multivariate Time Series*. w: G. Elliott and A. Timmermann (eds.), *Handbook of Economic Forecasting*, Elsevier, Oxford, 2, 899-960.
- Rodriguez, J. C. (2007). *Measuring Financial Contagion: A Copula Approach*. *Journal of Empirical Finance*, 14(3), 401-423.
- Rosenblatt, M. (1952). *Remarks on A Multivariate Transformation*. *Annals of Mathematical Statistics* 23, 470-472.
- Scarsini, M. (1984). *On Measures of Concordance*. *Stochastica* 8, 201-218.
- Schweizer, B., & Sklar, A. (1974). *Operations on Distribution Functions not Derivable from Operations on Random Variables*. *Studia Mathematica* 52, 43-52.
- Sklar, A. (1959). *Fonctions de repartition a n dimensionset leurs marges*. *Publ. Inst. Statis. Univ. Paris* 8, 229-231.
- Tsay, R. (2005). *Analysis of Financial Time series*. Wiley-Interscience, Hoboken.
- Xu, J. J. (1996). *Statistical Modelling and Inference for Multivariate and Longitudinal Discrete Response Data (rozprawa doktorska)*. Department of Statistics, University of British Columbia.